則古昔齋算十三種

對數探源卷一

海甯李善蘭學

正數以乘除爲比例對數以加減爲比例正數連比例之率以前率與後率遞減之則所餘者仍爲連比例之率且仍如原率之比例對數連比例之率以前率與後率遞減之則所餘者必爲齊同之數是故有對數萬求其逐一相對之正數則爲連比例萬率其理夫人而知之也有正數萬求其逐一相對之對數則雖歐羅巴造表之人僅能得其數未能知其理也間嘗深思得之歎其精微玄妙且用以造表較西人

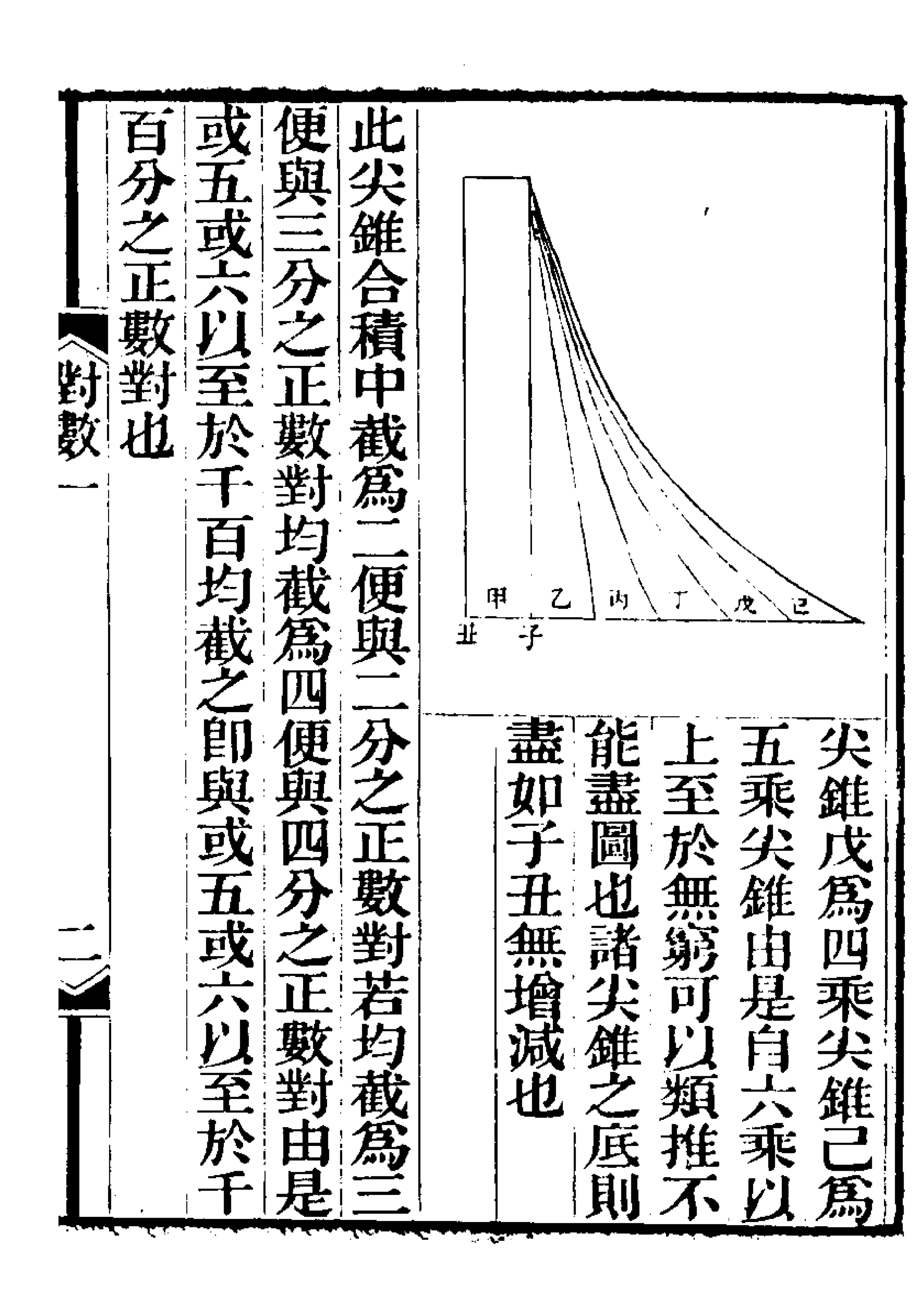
簡易萬倍然後知言數者之不可不先得夫理也今

二一詳其說於左

明理

對數之積諸乘尖錐之合積也與方圜之較同說詳方圜闡幽但方圜之較自立尖錐起此則自一長方起方圜之較次四乘尖錐次六乘尖錐次八次十皆用其偶去其奇此則次平尖錐次立尖錐次三乘次四乘次五次六奇偶皆用方圜之較諸尖錐之底皆以漸而減此則諸尖錐之底皆爲齊同之數三者其異也

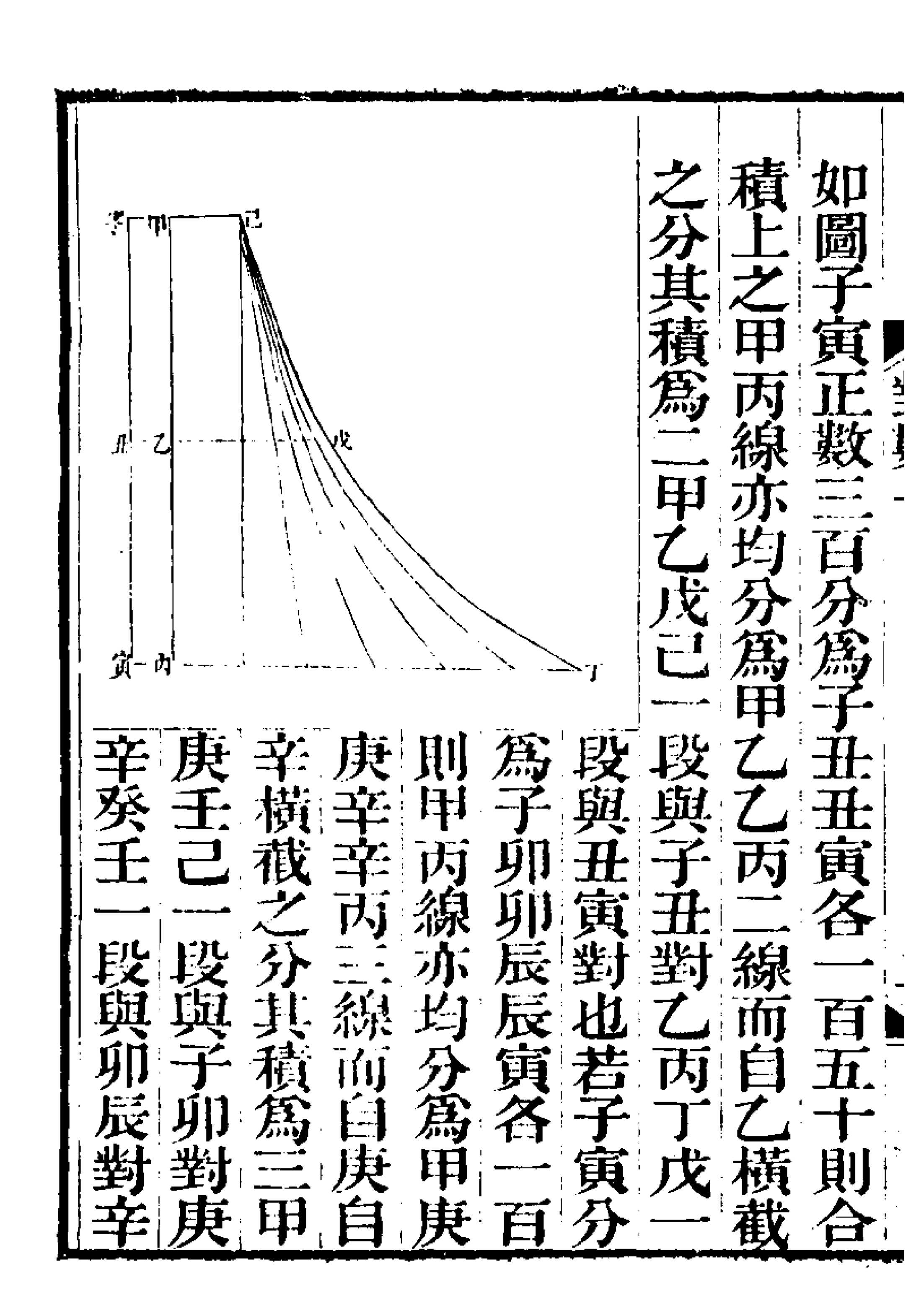
如圖甲爲長方形乙爲平尖錐丙爲立尖錐丁爲三乘



尖錐戊爲四乘尖錐己爲五乘尖錐由是自六乘以上至於無窮可以類推不能盡圖也諸尖錐之底則盡如子丑無增减也

此尖錐合積中截爲二便與二分之正數對若均截爲三便與三分之正數對均截爲四便與四分之正數對由是或五或六以至於千百均截之卽與或五或六以至於千百分之正數對也

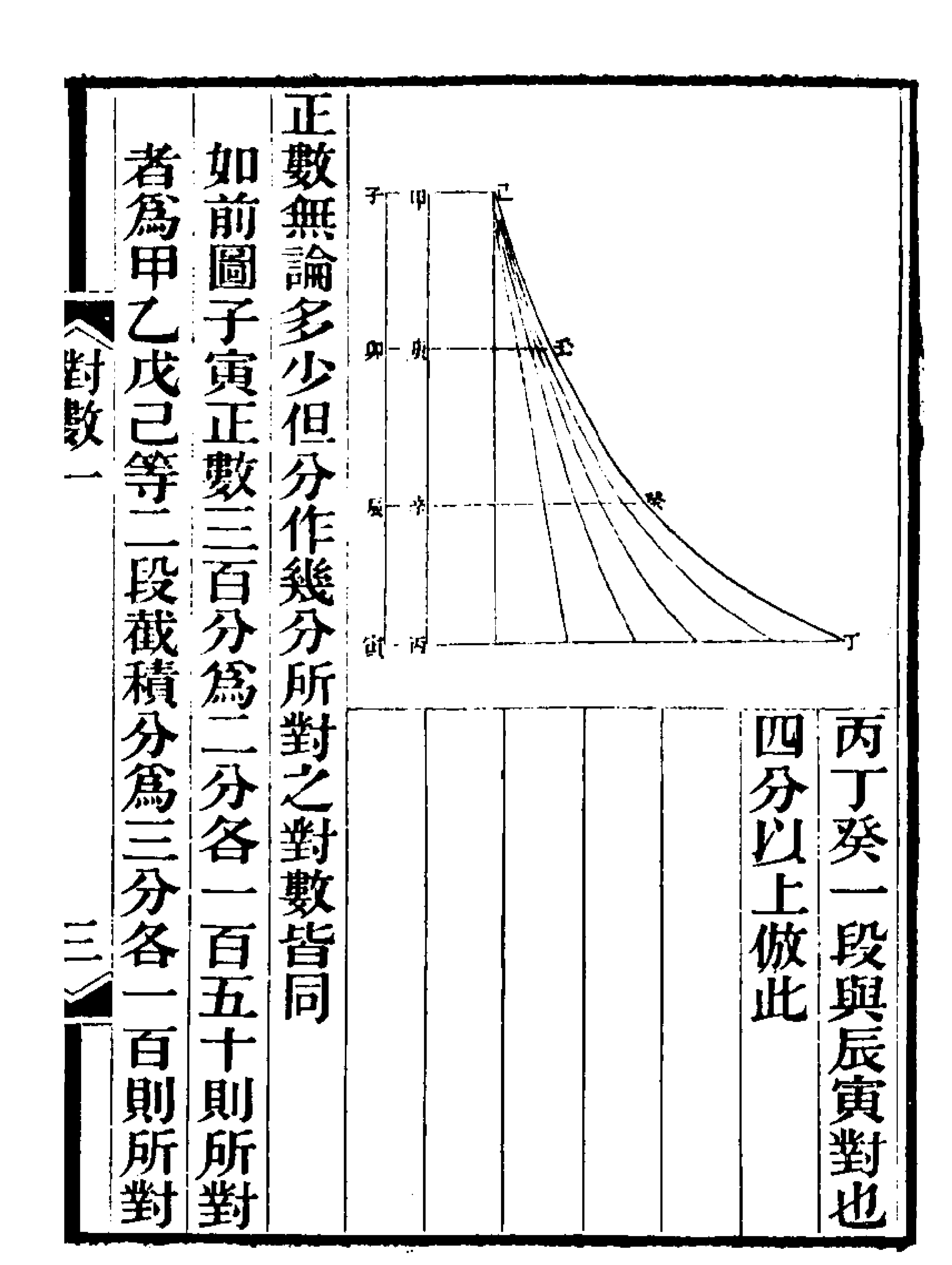
如圖子寅正數三百分爲子丑丑寅各一百五十則合積上之甲丙線亦均分爲甲乙乙丙二線而自乙橫截之分其積爲二甲乙戊己一段與子丑對乙丙丁戊一



段與丑寅對也若子寅分爲子卯卯辰辰寅各一百則甲丙線亦均分爲甲庚庚辛辛丙三線而自庚自辛橫截之分其積爲三甲庚壬己一段與子卯對庚辛癸壬一段與卯辰對辛

丙丁癸一段與辰寅對也

四分以上倣此



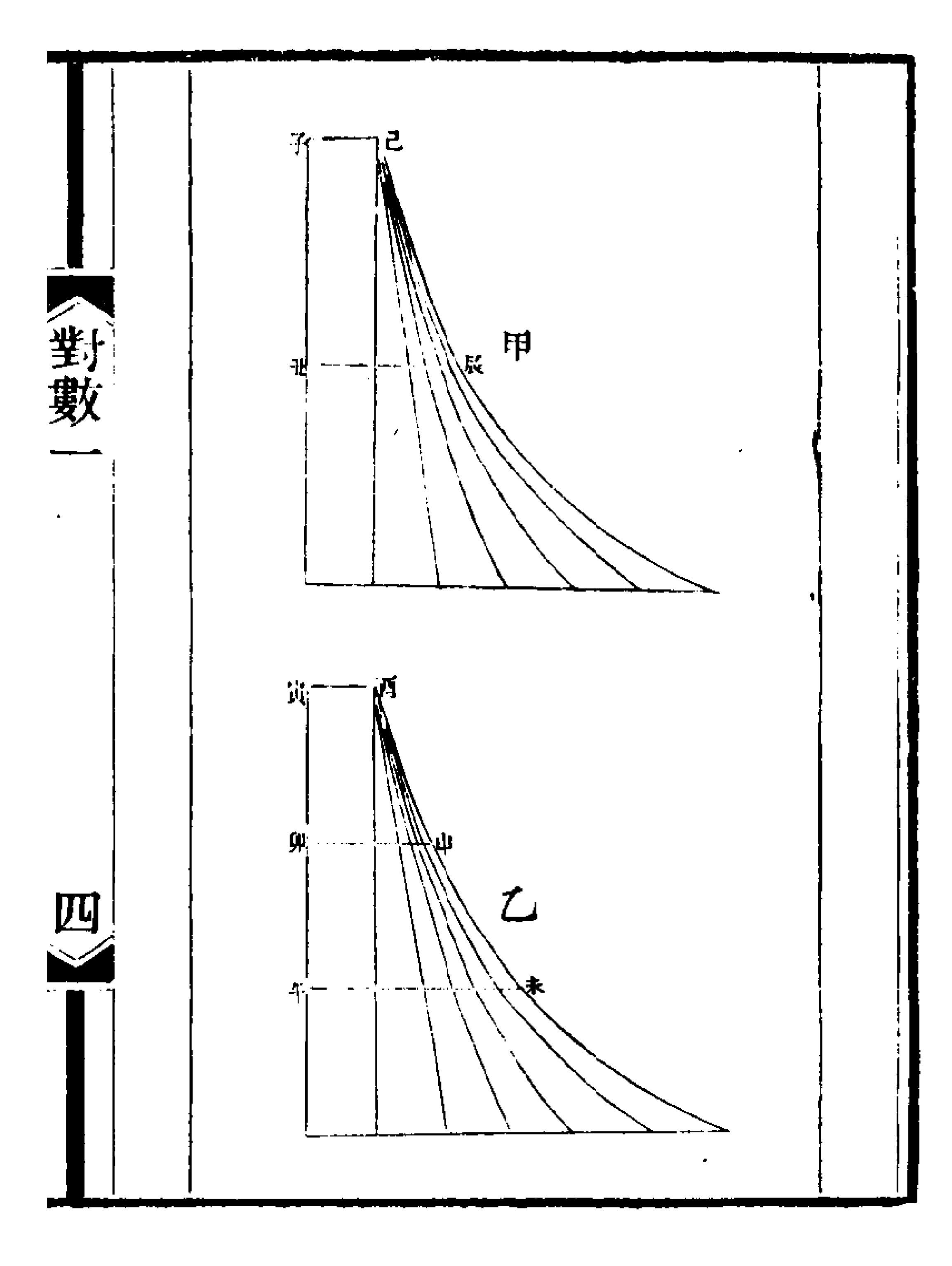
正數無論多少但分作幾分所對之對數皆同

如前圖子寅正數三百分爲二分各一百五十則所對

者爲甲乙戊己等二段截積分爲三分各一百則所對

者爲甲庚壬己等三段截積若命子寅正數爲一千二百分爲二分各六百所對者仍爲甲乙戊己等二段截積分爲三分各四百所對者仍爲甲庚壬己等三段截積也又或命子寅正數爲六分爲二分各三分爲三分各二所對者仍爲甲乙戊己等二段截積及甲庚壬己等三段截積也

此尖錐合積無論截爲幾段自最下第二段以上其積皆同


子
己
丑
辰
甲
寅
酉
卯
申
乙
午
未

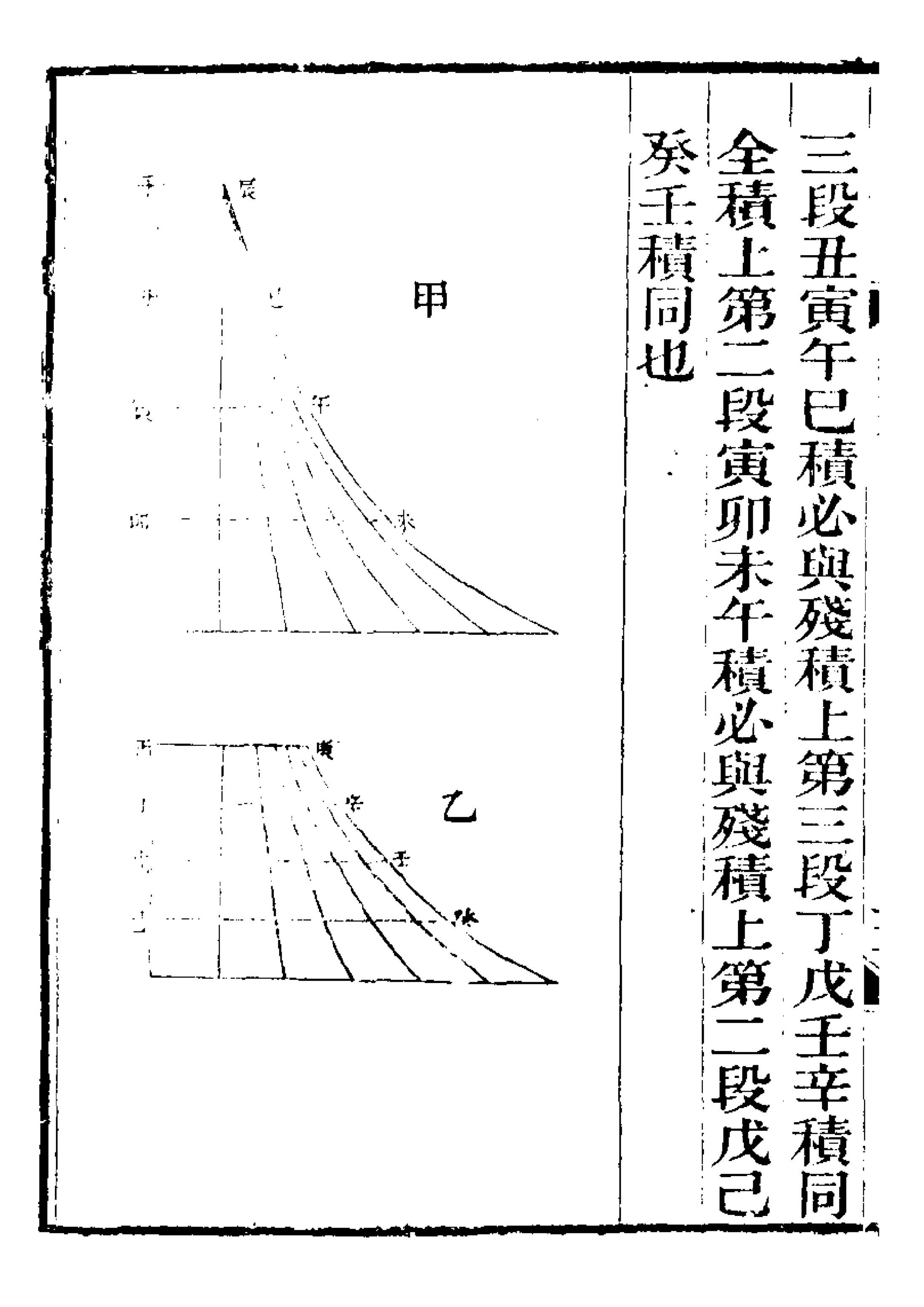
如圖甲截為二段乙截為三段丙截為四段丁截為五段甲上之第二段子丑辰巳積必與乙上第二段卯午未申積同亦與丙上第二段戊己庚辛積同亦與丁上

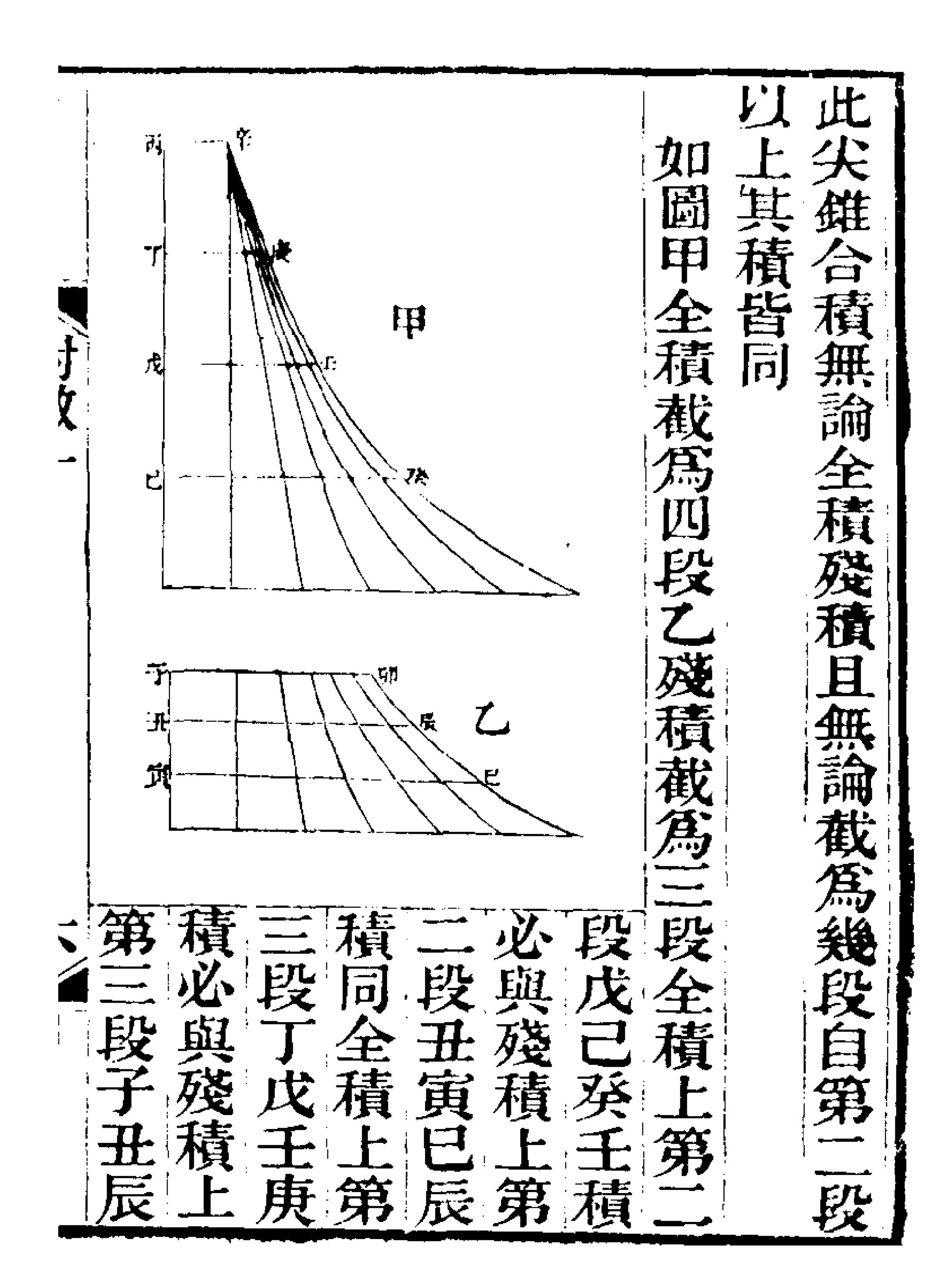
第二段房心尾箕積同也乙上之第三段寅卯申酉積必與丙上第三段亥戌辛壬積同亦與丁上第三段氐房箕斗積同也丙上之第四段戌亥壬癸積必與丁上第四段亢氐斗牛積同也五段以上理可類推

此尖錐合積無論全積殘積但同截爲幾段則自上而下至最下第二段其逐段之積皆同

如圖甲爲全積乙爲殘積（凡殘積皆截去上一段）試同截爲二段則全積上第二段子寅午辰積必與殘積上第二段丙戊壬庚積同也或同截爲四段則全積上第四段子丑巳辰積必與殘積上第四段丙丁辛庚積同全積上第

三段丑寅午巳積必與殘積上第三段丁戊壬辛積同全積上第二段寅卯未午積必與殘積上第二段戊己癸壬積同也





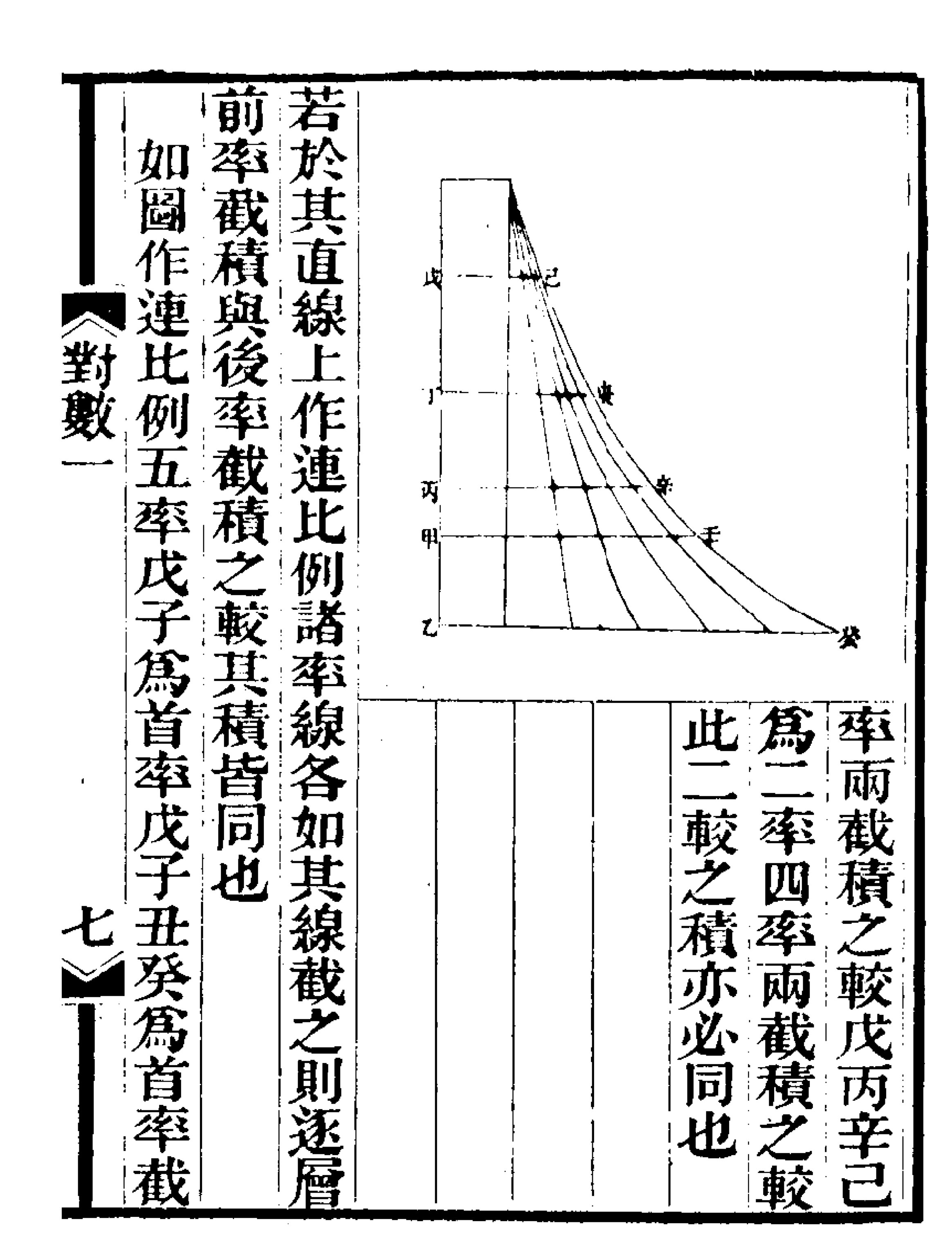
此尖錐合積無論全積殘積且無論截爲幾段自第一段以上其積皆同

如圖甲全積截爲四段乙殘積截爲三段全積上第二段戊已癸壬積必與殘積上第二段丑寅巳辰積同全積上第三段丁戊壬庚積必與殘積上第三段子丑辰

卯積同也

此尖錐合積於其直線上作比例四率線各如其線截其積則一率截積與二率截積之較必與三率截積與四率截積之較同一率截積與三率截積之較必與二率截積與四率截積之較同

如圖甲乙爲一率線甲乙癸壬爲一率截積丙乙爲二率線丙乙癸辛爲二率截積丁乙爲三率線丁乙癸庚爲三率截積戊乙爲四率線戊乙癸己爲四率截積丙甲壬辛爲一率二率兩截積之較戊丁庚己爲三率四率兩截積之較此二較之積必同丁甲壬庚爲一率三

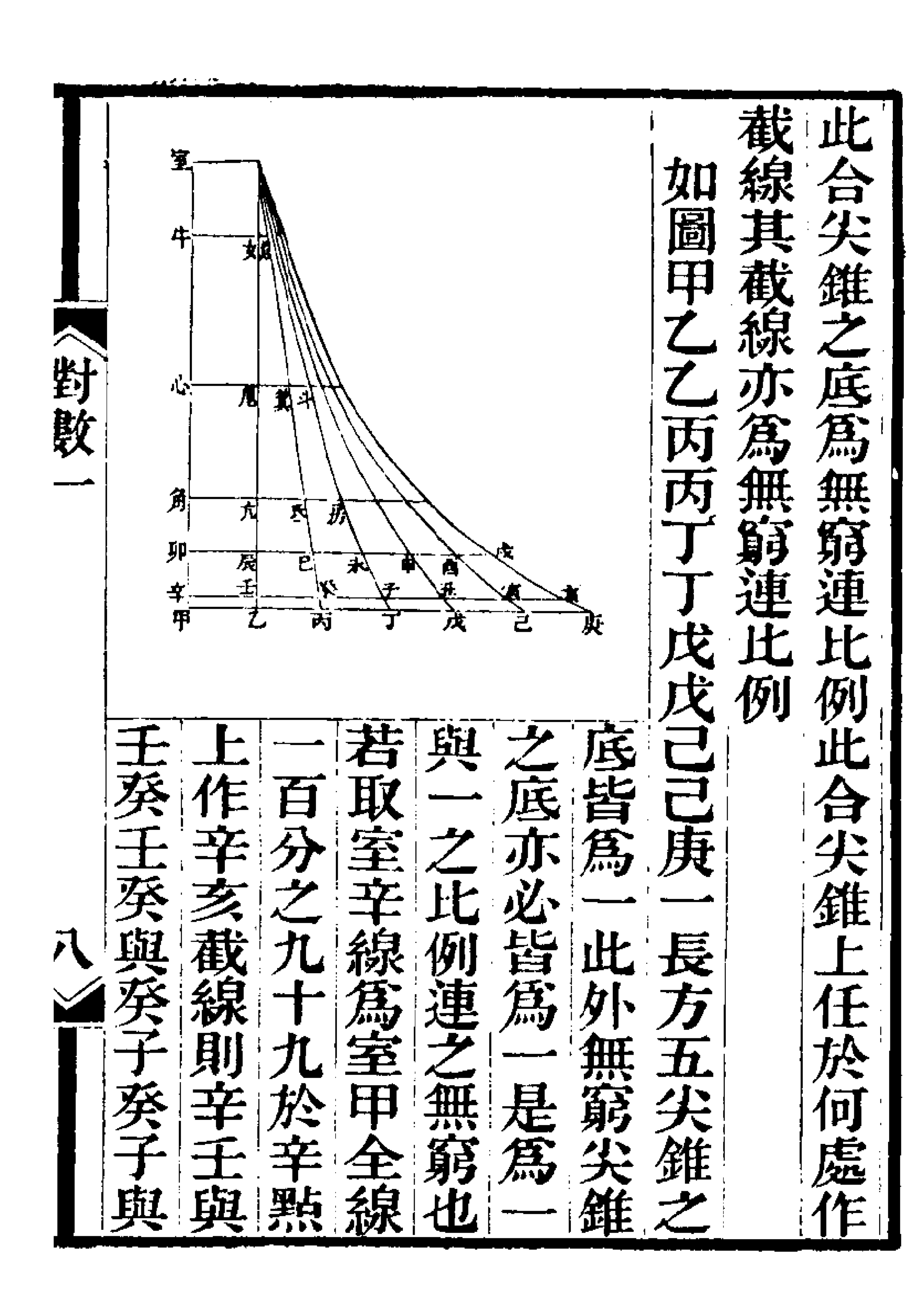


率兩截積之較戊丙辛己爲二率四率兩截積之較此二較之積亦必同也

若於其直線上作連比例諸率線各如其線截之則逐層前率截積與後率截積之較其積皆同也

如圖作連比例五率戊子爲首率戊子丑癸爲首率截

積丁子爲二率丁子丑壬爲二率截積丙子爲三率丙子丑辛爲三率截積乙子爲四率乙子丑庚爲四率截積甲子爲五率甲子丑己爲五率截積丁戊癸壬爲首率二率兩截積之較丙丁壬辛爲二率三率兩截積之較乙丙辛庚爲三率四率兩截積之較甲乙庚己爲四率五率兩截積之較此四較之積必同也



此合尖錐之底爲無窮連比例此合尖錐上任於何處作截線其截線亦爲無窮連比例

如圖甲乙乙丙丙丁丁戊戊己己庚一長方五尖錐之底皆爲一此外無窮尖錐之底亦必皆爲一是爲一與一之比例連之無窮也若取室辛線爲室甲全線一百分之九十九於辛點上作辛亥截線則辛壬與壬癸壬癸與癸子癸子與

子丑子丑與丑寅丑寅與寅亥此六截線皆如一百與九十九之比例此外無窮尖錐上之截線亦必如一百與九十九之比例是爲一百與九十九之比例連之無窮也如辛壬一百則壬癸九十九壬癸一百則癸子九十九所謂一百與九十九之比例也後俱同若取室卯線爲全線八分之七於卯點作截線則卯辰與辰巳辰巳與巳未巳未與未申未申與申酉申酉與酉戌皆如八與七之比例此外無窮尖錐之截線亦必如八與七之比例是爲八與七之比例連之無窮也又或取室角線爲全線四分之三於角點作線截之則角亢與亢氐亢氐與氐房皆如四與三之比例是爲四與三

之比例連之無窮也又或取室心線爲全線二分之一於心點作線截之則心尾與尾箕尾箕與箕斗皆如二與一之比例是爲二與一之比例連之無窮也又或取室牛線爲全線二十分之三則牛女與女危卽如二十與三之比例是二十與三之比例連之無窮也凡連比例後率與前率之比卽如所取線與全線之比也

凡截線皆有盡界其界皆可求而底無盡界

如前圖壬癸爲辛壬一百分之九十九則辛壬必爲全截線一百分之一設辛壬爲一百則全截線之盡界必爲一萬也又如亢氐爲角亢四分之三則角亢必爲全

截線四分之一設角亢爲一百則全截線之
盡界必爲四百也故以首率二率較與首率
之比即同於首率與全截線之比也何則試
任作一線如尾角取其四分之一爲角亢餘
亢尾再取其四分之一爲亢氐餘氐尾再取
其四分之一爲氐房餘房尾如此累取之可

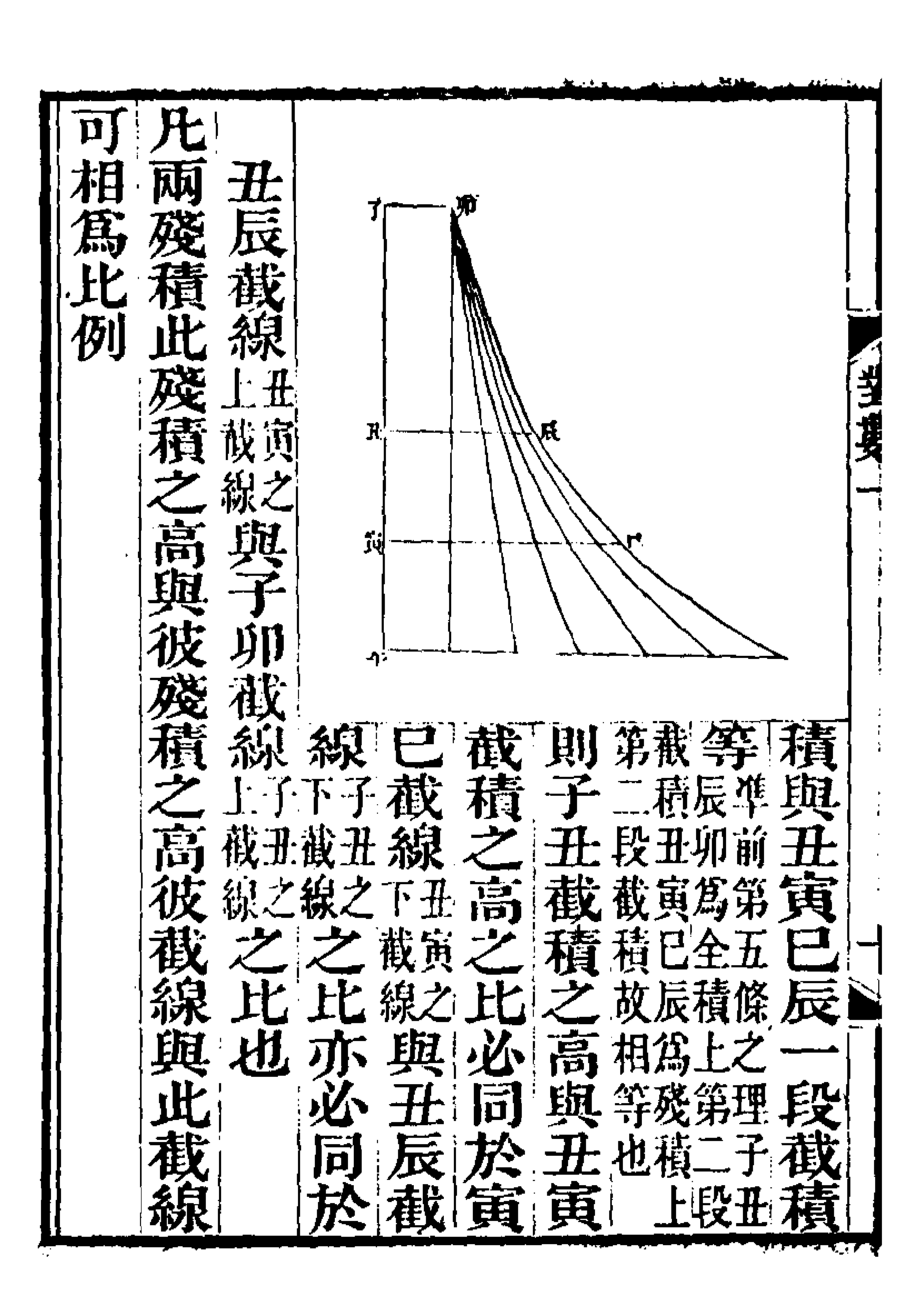
尾　房　氐　亢　角
氐

以無窮而角亢與亢氐亢氐與氐房必皆如四分之三
是即四與三之無窮連比例也而亢尾爲角尾四分之
三亢氐爲角亢四分之三角亢亢氐之較爲角氐角尾
亢尾之較爲角亢故以角氐爲一率角亢爲二率仍以

角亢爲三率四率必爲角尾也曰亢氐與角亢何以知其爲四分之三也曰角亢者角尾四分之一也亢氐者亢尾四分之一也其母既如四與三之比例故其子亦如四與三之比例也凡截線上之連比例皆漸小故必有一盡界任爾無窮比例總不能越此界底上之連比例皆如首率而其比例又無盡則烏得有盡界也

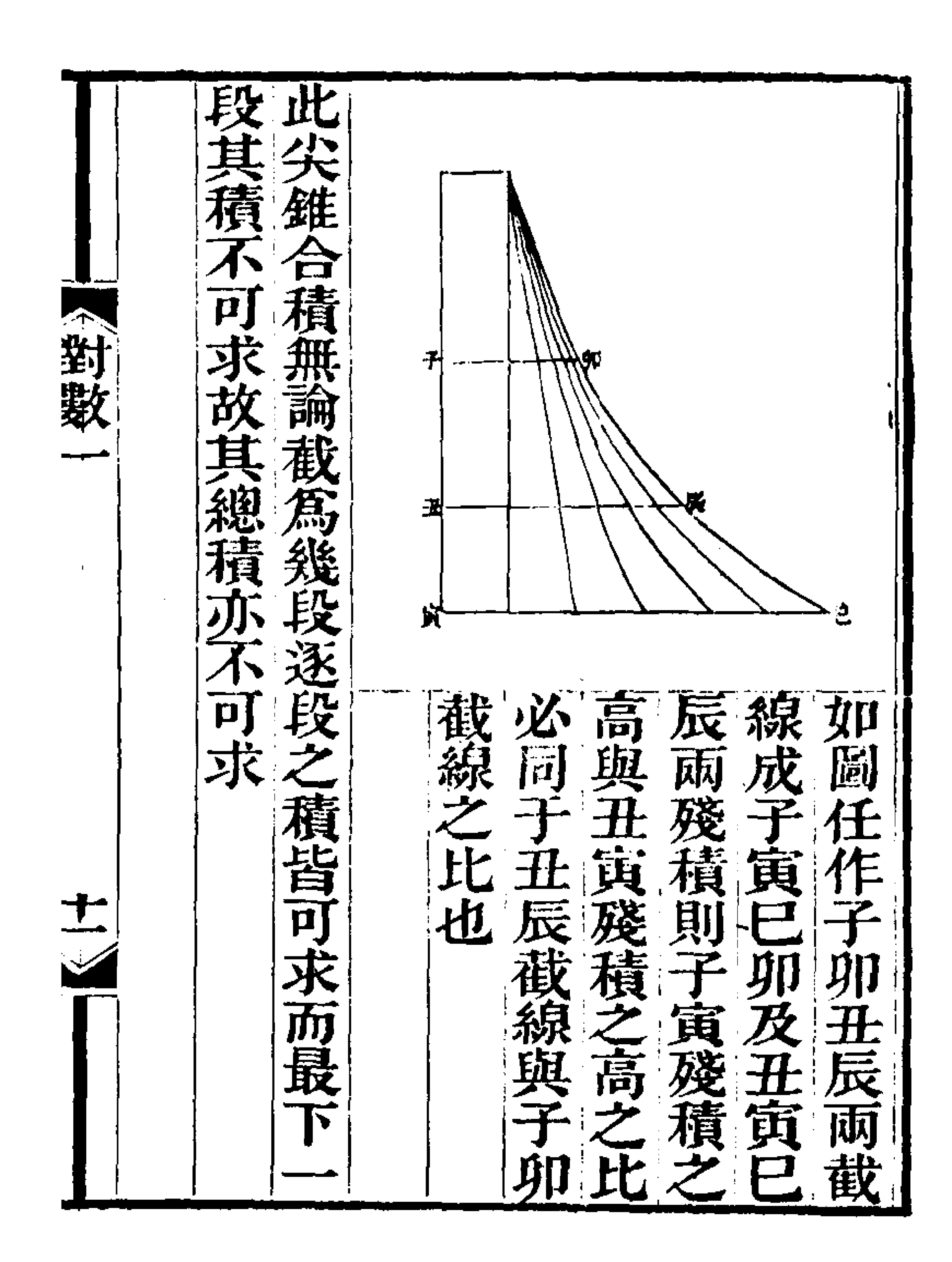
凡兩截積同者此截積之高與彼截積之高彼截線與此截線可相爲比例

如圖子午尖錐合積之高平分於丑作丑辰截線又以丑午之高平分於寅作寅巳截線令子丑辰卯一段截



積與丑寅巳辰一段截積等準前第五條之理子丑辰卯爲全積上第二段截積丑寅巳辰爲殘積上第二段截積故相等也則子丑截積之高與丑寅截積之高之比必同於寅巳截線丑寅之下截線與丑辰截線子丑之下截線之比亦必同於丑辰截線丑寅之上截線與子卯截線子丑之上截線之比也

凡兩殘積此殘積之高與彼殘積之高彼截線與此截線可相爲比例



如圖任作子卯丑辰兩截線成子寅巳卯及丑寅巳辰兩殘積則子寅殘積之高與丑寅殘積之高之比必同子丑辰截線與子卯截線之比也

此尖錐合積無論截為幾段逐段之積皆可求而最下一段其積不可求故其總積亦不可求

如圖截爲三段則甲乙二段其積可求而丙段之積不可求或截爲四段則子丑寅三段其積可求而卯段之積不可求盖諸段皆以截線爲界截線有盡界故其積

可求丙卯二段以底爲界底無盡界故其積不可求總積必連最下一段故亦不可求也

南滙賈步緯校

對數探源卷二　　　則古昔齋算學三

海甯李善蘭學

詳法

先求二十尖錐汎積尖錐本無盡然用以造表二十已足矣法借一萬萬爲長方積卽爲諸尖錐之根于上二除得五千萬爲平尖錐積三除得三千三百三十三萬三千三百三十三爲立尖錐積四除得二千五百萬爲三乘尖錐積五除得二千萬爲四乘尖錐積六除得一千六百六十六萬六千六百六十六爲五乘尖錐積七除得一千四百二十八萬五千七百一十四爲六乘尖錐積

八除得一千二百五十萬爲七乘尖錐積九除得一千一百一十一萬一千一百一十一爲八乘尖錐積十除得一千萬爲九乘尖錐積十一除得九百〇九萬〇九百〇九爲十乘尖錐積十二除得八百三十三萬三千三百三十三爲十一乘尖錐積十三除得七百六十九萬二千三百〇七爲十二乘尖錐積十四除得七百一十四萬二千八百五十七爲十三乘尖錐積十五除得六百六十六萬六千六百六十六爲十四乘尖錐積十六除得六百二十五萬爲十五乘尖錐積十七除得五百八十八萬二千三百五十三爲十六乘尖錐積十八

除得五百五十五萬五千五百五十五爲十七乘尖錐積十九除得五百二十六萬三千一百五十七爲十八乘尖錐積二十除得五百萬爲十九乘尖錐積

二十尖錐汎積表

長方	一	○	○	○	○	○	○	○	○
平	○	五	○	○	○	○	○	○	○
立	○	三	三	三	三	三	三	三	三
三乘	○	二	五	○	○	○	○	○	○
四乘	○	二	○	○	○	○	○	○	○
五乘	○	一	六	六	六	六	六	六	六
六乘	○	一	四	二	八	五	七	一	四
七乘	○	一	二	五	○	○	○	○	○
八乘	○	一	一	一	一	一	一	一	一
九乘	○	一	○	○	○	○	○	○	○
十乘	○	○	九	○	九	○	九	○	九
十一乘	○	○	八	三	三	三	三	三	三
十二乘	○	○	七	六	九	二	三	○	七
十三乘	○	○	七	一	四	二	八	五	七
十四乘	○	○	六	六	六	六	六	六	六
十五乘	○	○	六	二	五	○	○	○	○
十六乘	○	○	五	八	八	二	三	五	三
十七乘	○	○	五	五	五	五	五	五	五
十八乘	○	○	五	二	六	三	一	五	七
十九乘	○	○	五	○	○	○	○	○	○

乃分此泯積爲十段求其第二段至第十段之共積
法置泯積表最下一層以二除之得二百五十萬加入
第二層得七百七十六萬三千一百五十七又以二除
之得三百八十八萬一千五百七十八加入第三層得
九百四十三萬七千一百三十四又以二除之得四百
七十一萬八千五百六十七加入第四層得一千〇六
十萬〇〇九百二十〇又以二除之得五百三十萬〇
〇四百六十〇加入第五層得一千一百五十五萬〇
四百六十〇又以二除之得五百七十七萬五千二百
三十加入第六層得一千二百四十四萬一千八百九

十六又以二除之得六百二十二萬〇九百四十八加入第七層得一千三百三十六萬三千八百〇五又以二除之得六百六十八萬一千九百〇二加入第八層得一千四百三十七萬四千二百〇九又以二除之得七百一十八萬七千一百〇四加入第九層得一千五百五十二萬〇四百三十七又以二除之得七百七十六萬〇二百一十八加入第十層得一千六百八十五萬一千一百二十七又以二除之得八百四十二萬五千五百六十三加入第十一層得一千八百四十二萬五千五百六十三又以二除之得九百二十一萬二千

七百八十一加入第十二層得二千〇三十二萬三千八百九十二又以二除之得一千〇一十六萬一千九百四十六加入第十三層得二千二百六十六萬一千九百四十六又以二除之得一千一百三十三萬〇九百七十三加入第十四層得二千五百六十一萬六千六百八十七又以二除之得一千二百八十萬〇八千三百四十三加入第十五層得二千九百四十七萬五千〇〇九又以二除之得一千四百七十三萬七千五百〇四加入第十六層得三千四百七十三萬七千五百〇四又以二除之得一千七百三十六萬八千七百

五十二加入第十七層得四千二百三十六萬八千七百五十二又以二除之得二千一百一十八萬四千三百七十六加入第十八層得五千四百五十一萬七千七百〇九又以二除之得二千七百二十五萬八千八百五十四加入第十九層得七千七百二十五萬八千八百五十四又以二除之得三千八百六十二萬九千四百二十七加入最上一層得一萬三千八百六十二萬九千四百二十七又以二除之得六千九百三十一萬四千七百一十三為第二段積

另置汎積表第十二層以五除之得二百二十二萬二

千二百二十二加入第十三層得一千四百七十二萬二千二百二十二又以五除之得二百九十四萬四千四百四十四加入第十四層得一千七百二十三萬〇一百五十八又以五除之得三百四十四萬六千〇三十一加入第十五層得二千〇一十一萬二千六百九十七又以五除之得四百〇二萬二千五百三十九加入第十六層得二千四百〇二萬二千五百三十九又以五除之得四百八十萬〇四千五百〇七加入第十七層得二千九百八十萬〇四千五百〇七又以五除之得五百九十六萬〇九百〇一加入第十八層得三

千九百二十九萬四千二百三十四又以五除之得七百八十五萬八千八百四十六加入第十九層得五千七百八十五萬八千八百四十六又以五除之得一千一百五十七萬一千七百六十九加入最上一層得一萬一千一百五十七萬一千七百六十九又以五除之得二千二百三十一萬四千三百五十三爲第五段積加入三个第二段積○按準上卷第四條分尖錐爲二段則第二段積即第六至第十凡五段之共積若分五段則第二段積即第二第四兩段之共積故三个第二段積即八段共積也得二萬三千○二十五萬八千四百九十二即第二段至第十段其積也

求第五段止用九个尖錐者九乘尖錐用五連除十

次已不足一數故九乘以下俱不用也

次求二十尖錐定積

法以二段至十段其積二三〇二五八四九二爲一率

長方積一〇〇〇〇〇〇〇〇〇爲二率二段至十段定

其積一〇〇〇〇〇〇〇〇〇爲三率求得四率〇四三

四二九四四五一爲定長方積卽爲諸尖錐定積之根于

上如前求汎積法二而一得〇二一七一四七二五爲

平尖錐定積三而一得〇一四四七六四八三爲立尖

錐定積四而一得〇一〇八五七三六二一爲三乘尖錐

定積五而一得〇〇八六八五八九〇爲四乘尖錐定積六而一得〇〇七二三八二四一爲五乘尖錐定積七而一得〇〇六二〇四二〇七爲六乘尖錐定積八而一得〇〇五四二八六八一爲七乘尖錐定積九而一得〇〇四八二五四九四爲八乘尖錐定積十而一得〇〇四三四二九四五爲九乘尖錐定積十一而一得〇〇三九四八一三一爲十乘尖錐定積十二而一得〇〇三六一九一二〇爲十一乘尖錐定積十三而一得〇〇三三四〇七二七爲十二乘尖錐定積十四而一得〇〇三一〇二一〇三爲十三乘尖錐定積十

五而一得〇〇二八九五二九六爲十四乘尖錐定積
十六而一得〇〇二七一四三四〇爲十五乘尖錐定
積十七而一得〇〇二五五四六七三爲十六乘尖錐
定積十八而一得〇〇二四一二七四七爲十七乘尖
錐定積十九而一得〇〇二三八五七六〇爲十八乘
尖錐定積二十而一得〇〇二一七一四七二爲十九
乘尖錐定積

二十尖錐定積表

乘方	數	位
長方	一五四九二四三四○	二十
平	五二七四一七一二○	十九
立	三八四六七四四一○	十八
三乘	二六三七五八○一○	十七
四乘	○九八五八六八○○	十六
五乘	一四二八三二七○○	十五
六乘	七○二四○二六○○	十四
七乘	一八六八二四五○○	十三
八乘	四九四五二八四○○	十二
九乘	五四九二四三四○○	十一
十乘	一三一八四九三○○	十
十一乘	○二一九一六三○○	九
十二乘	七二七○四三三○○	八
十三乘	三○一二○一三○○	七
十四乘	六九二五九八二○○	六
十五乘	○四三四一七二○○	五
十六乘	三七六四五五二○○	四
十七乘	七四七二一四二○○	三
十八乘	○六七五八二二○○	二
十九乘	二七四一七一二○○	一

既得二十尖錐定積便可依此造表今取正數自一至十逐一求其對數以爲例餘可類推也

一之對數不可求故借○爲對數

正數	一〇〇〇〇〇〇〇〇〇
對數	

解曰一之對數即尖錐合積中之最下一段其數無盡不可求故命爲〇也

求二之對數法置尖錐定積表最下一層〇〇二一七一四七二以二除之得〇〇一〇八五七三六加入第二層得〇〇三三七一四九六又以二除之得〇〇一六八五七四八加入第三層得〇〇四〇九八四九五又以二除之得〇〇二〇四九二四七加入第四層得〇〇四六〇三九二〇又以二除之得〇〇二三〇一

九六〇加入第五層得〇〇五〇一六三〇〇又以二除之得〇〇二五〇八一五〇加入第六層得〇〇五四〇三四四六又以二除之得〇〇二七〇一七二三加入第七層得〇〇五八〇三八二六又以二除之得〇〇二九〇一九一三加入第八層得〇〇六二四二六四〇又以二除之得〇〇三一二一三二〇加入第九層得〇〇六七四〇四四〇又以二除之得〇〇三三七〇二二〇加入第十層得〇〇七三一八三五一又以二除之得〇〇三六五九一七五加入第十一層得〇〇八〇〇二一二〇又以二除之得〇〇四〇〇

一〇六〇加入第十二層得〇〇八八二六五五四又以二除之得〇〇四四一三二七七加入第十三層得〇〇九八四一九五八又以二除之得〇〇四九二〇九七九九加入第十四層得〇一一二五一八六又以二除之得〇〇五五六二五九三加入第十五層得〇一二八〇〇八三四又以二除之得〇〇六四〇〇四一七加入第十六層得〇一五〇八六三〇七又以二除之得〇〇七五四三一五三加入第十七層得〇一八四〇〇五一五又以二除之得〇〇九二〇〇二五七加入第十八層得〇二三六七六七四〇又以二除

之得〇一一八三八三七〇加入第十九層得〇三三五五三〇九五又以二除之得〇一六七七六五四七加入第二十層得〇六〇二〇五九九八又以二除之得〇三〇一〇二九九九末三位收爲整數得〇三〇一〇三〇〇〇爲一與二兩對數之較一無對數故一與二兩對數之較即二之對數也

正數	對數
一	〇〇〇〇〇〇〇〇〇
二	〇三〇一〇三〇〇〇

解曰以正數爲法除尖錐表最下一層加入上一層再以法除之加入再上一層再以法除之如此遞加遞除至最上一層而止得兩對數之較加入前對數得本對數凡依次求對數者皆用此法

求三之對數法以三連次自乘至十三次得○○四七八二九六九大於表中十三乘尖錐積便以十三乘尖錐○○三一○二一○三爲最下一層以三除之得○○一○三四○三四加入第八層得○○四三七四七·六一又以三除之得○○一四五八二五三加入第九層得○○五○七七三七三又以三除之得○○一六

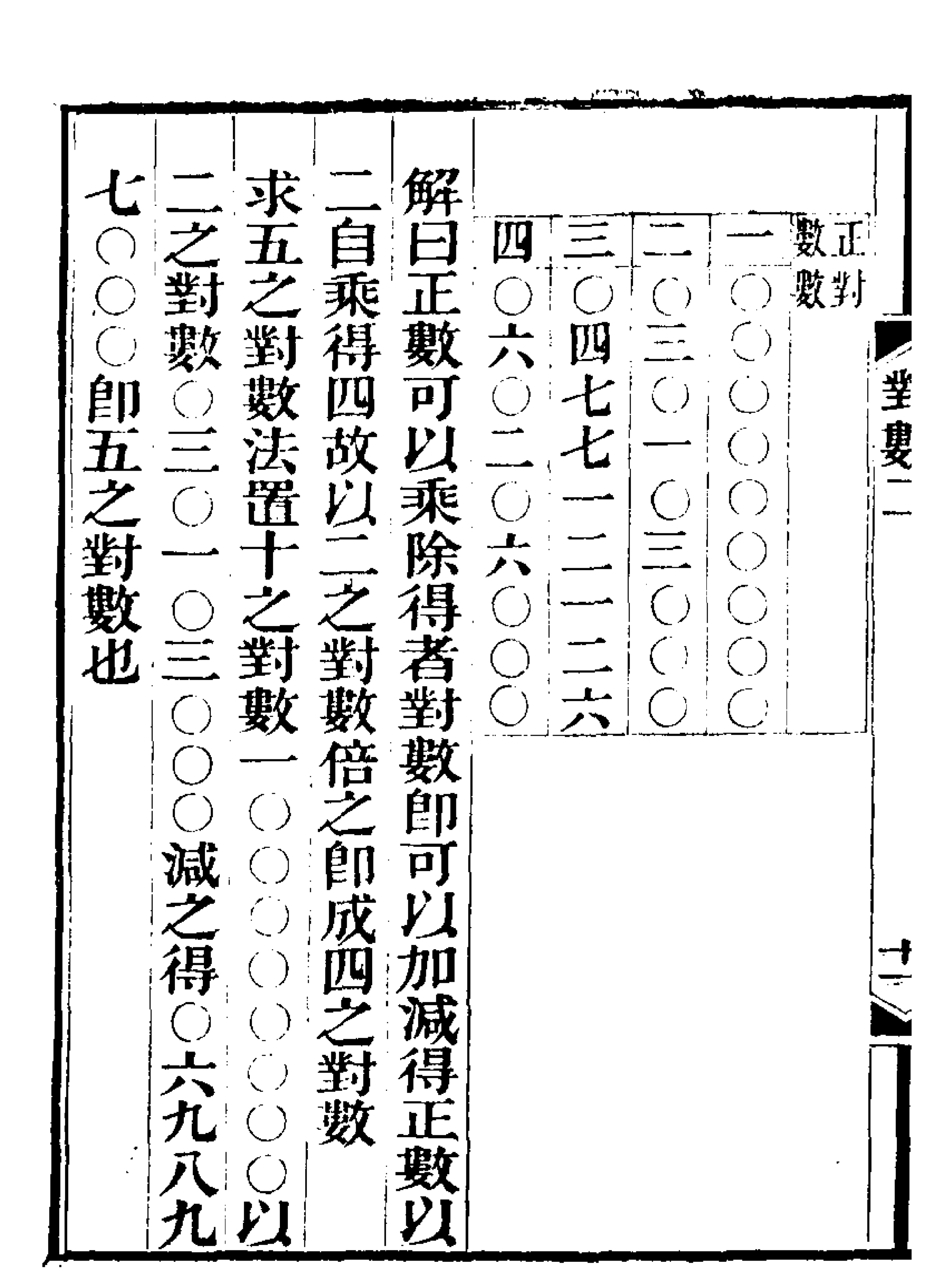
九二四五七加入第十層得○○五六四○五八八又以三除之得○○一八八○一九六加入第十一層得○○六二二三一四一又以三除之得○○二○七四三八○加入第十二層得○○六八九九八七四又以三除之得○○二二九九九五八加入第十三層得○○七七二八六三九又以三除之得○○二五七六二一三加入第十四層得○○八七八○四二○又以三除之得○○二九二六八○六加入第十五層得○一○一六五○四七又以三除之得○○三三八八三四九加入第十六層得○一二○七四二三九又以三除

之得〇〇四〇二四七四四六加入第十七層得〇一四八八二一〇八又以三除之得〇〇四九六〇七〇二加入第十八層得〇一九四三七一八五又以三除之得〇〇六四七九〇六一加入第十九層得〇二八一九三七八六又以三除之得〇〇九三九七九二八加入最上一層得〇五二八二七三七九又以三除之得〇一七六〇九一二六爲二與三兩對數之較加入二之對數〇三〇一〇三〇〇〇得〇四七七一二一二六卽三之對數也

正數	對數
一	〇〇〇〇〇〇〇〇〇
二	〇三〇一〇三〇〇〇
三	〇四七七一二一二六

解曰以正數自乘十三次大於十三乘尖錐積則十三乘尖錐積以正數除十四次已不滿法十四乘以下諸尖錐必愈不滿法矣故竟命十三乘尖錐爲最下一層十四乘以下俱去不用也後俱倣此

求四之對數法置二之對數〇三〇一〇三〇〇〇倍之得〇六〇二〇六〇〇〇即四之對數也



正數	對數
一	○○○○○○○○○
二	○三○一○三○○○
三	○四七七一二一二六
四	○六○二○六○○○

解曰正數可以乘除得者對數卽可以加減得正數以二自乘得四故以二之對數倍之卽成四之對數

求五之對數法置十之對數一○○○○○○○○以二之對數○三○一○三○○○減之得○六九八九七○○○卽五之對數也

正數	對數
一	〇〇〇〇〇〇〇〇〇
二	〇三〇一〇三〇〇〇
三	〇四七七一二一二六
四	〇六〇二〇六〇〇〇
五	〇六九八九七〇〇〇

解曰前所設二段至十段定其積一萬萬即一與十兩對數之較一無對數故知十之對數爲一萬萬也餘見第四條下

求六之對數法置二之對數〇三〇一〇三〇〇〇以

三之對數○四七七一二一二六加之得○七七八一五一二六即六之對數也

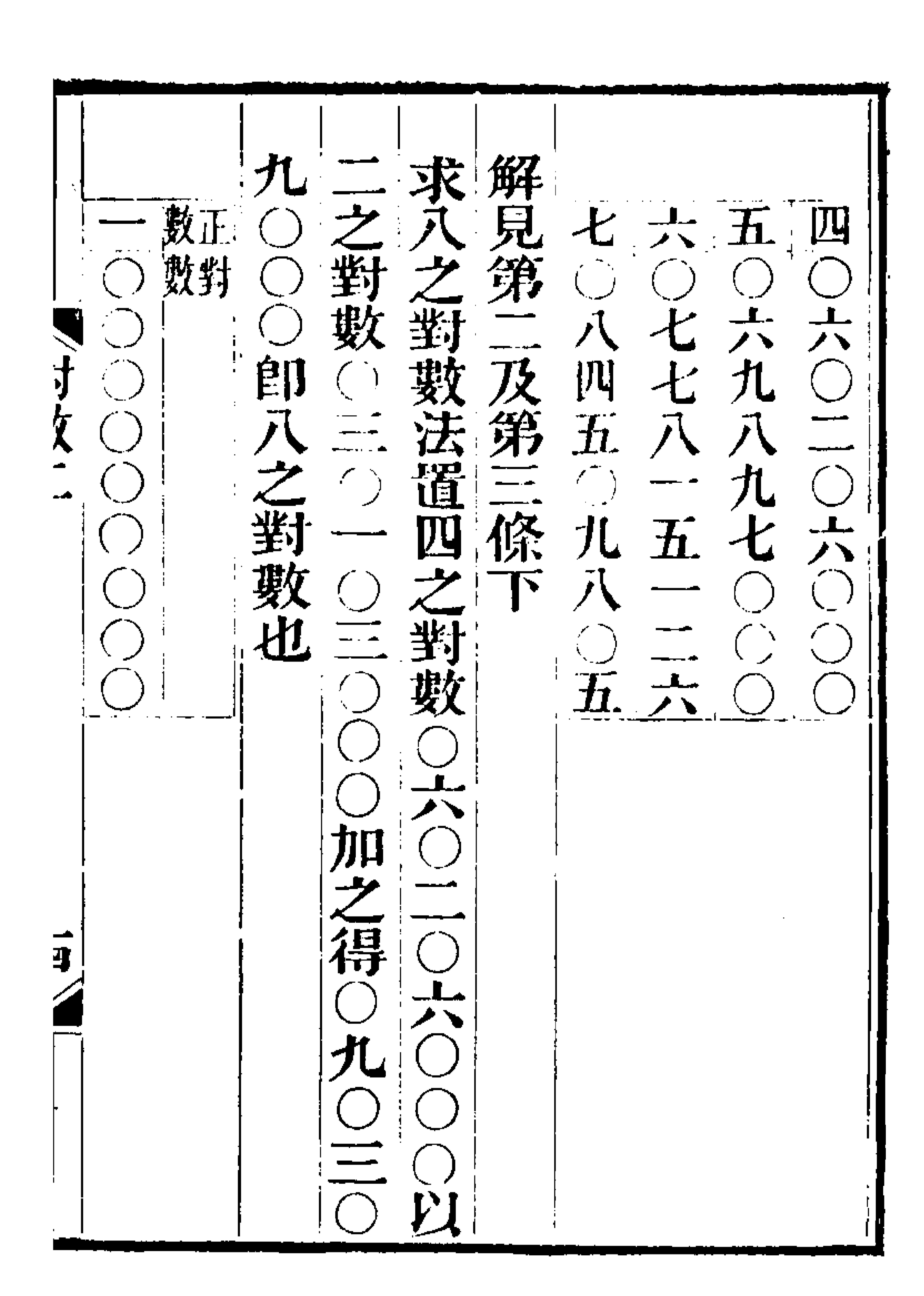
正數	對數
一	○○○○○○○○○
二	○三○一○三○○○
三	○四七七一二一二六
四	○六○二○六○○○
五	○六九八九七○○○
六	○七七八一五一二六

解見第四條下

求七之對數法以七連次自乘至七次得〇〇五七六
四八〇一大于表中七乘尖錐積便以七乘尖錐〇〇
五四二八六八一爲最下一層以七除之得〇〇〇七
七五五二五加入第十四層得〇〇六九七九七三二
又以七除之得〇〇〇九九七一〇四加入第十五層
得〇〇八二三五三四五又以七除之得〇〇一一七
六四七七加入第十六層得〇〇九八六二三六七又
以七除之得〇〇一四〇八九〇九加入第十七層得
〇一二二六六二七一又以七除之得〇〇一七五二
三二四加入第十八層得〇一六二三八八〇七又以

七除之得○○二三二八四○一加入第十九層得○二四○三三二二六又以七除之得○○三四三三三○三加入最上一層得○四六八六二七五四又以七除之得○○六六九四六七九爲六與七兩對數之較以加六之對數○七七八一五一二六得○八四五○九八○五卽七之對數也

正數	對數
一	○○○○○○○○○
二	○三○一○三○○○
三	○四七七一二一二六



正數	對數
四	〇六〇二〇六〇〇〇
五	〇六九八九七〇〇〇
六	〇七七八一五一二六
七	〇八四五〇九八〇五

解見第二及第三條下

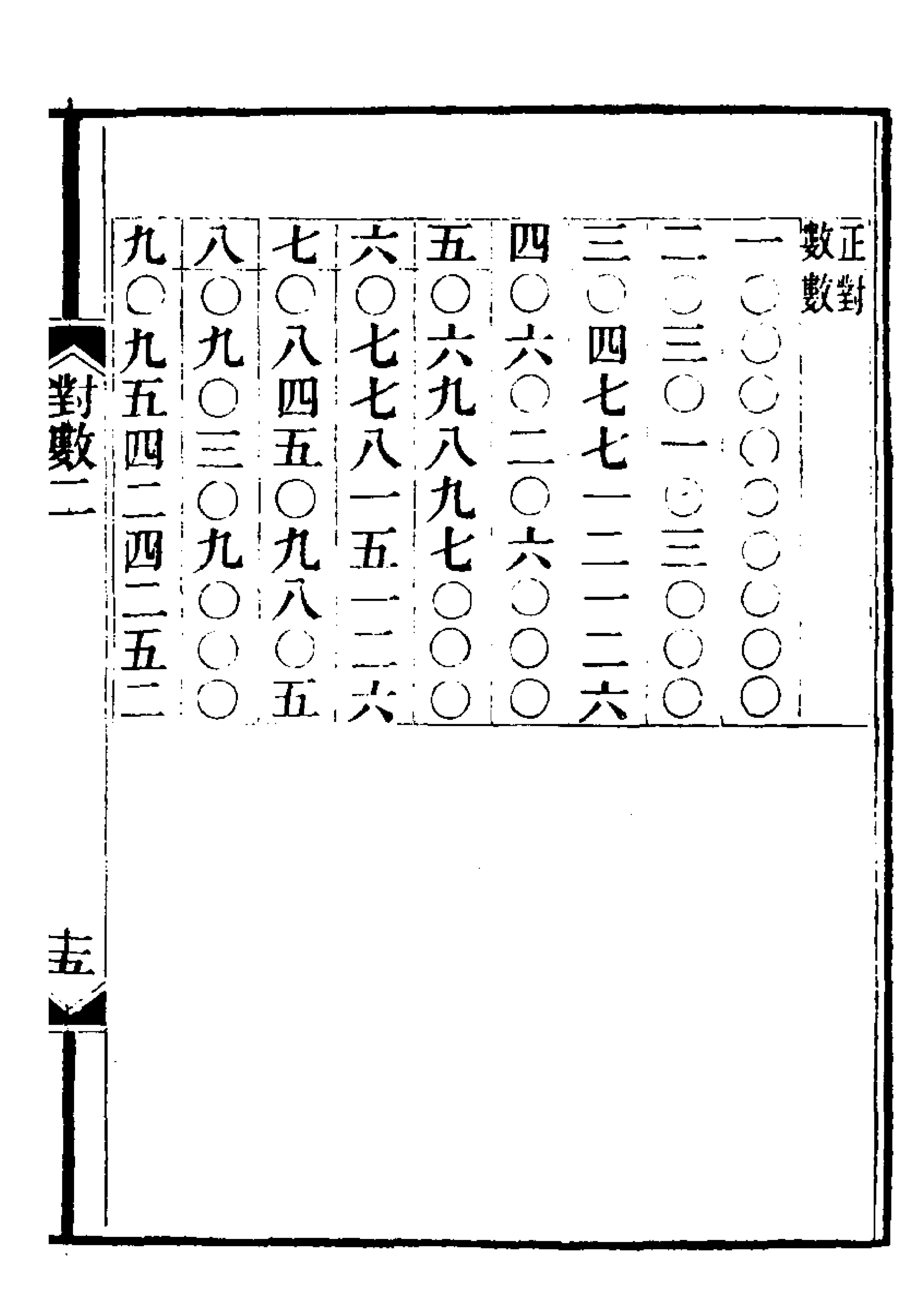
求八之對數法置四之對數〇六〇二〇六〇〇〇以二之對數〇三〇一〇三〇〇〇加之得〇九〇三〇九〇〇〇卽八之對數也

正數	對數
一	〇〇〇〇〇〇〇〇〇

二	〇三〇一〇三〇〇〇
三	〇四七七一二一二六
四	〇六〇二〇六〇〇〇
五	〇六九八九七〇〇〇
六	〇七七八一五一二六
七	〇八四五〇九八〇五
八	〇九〇三〇九〇〇〇

解見第四條下

求九之對數法置三之對數〇四七七一二一二六倍之得〇九五四二四二五二一即九之對數也



正數	對數
一	○○○○○○○○○
二	○三○一○三○○○
三	○四七七一二一二六
四	○六○二○六○○○
五	○六九八九七○○○
六	○七七八一五一二六
七	○八四五○九八○五
八	○九○三○九○○○
九	○九五四二四二五二

解見第四條下

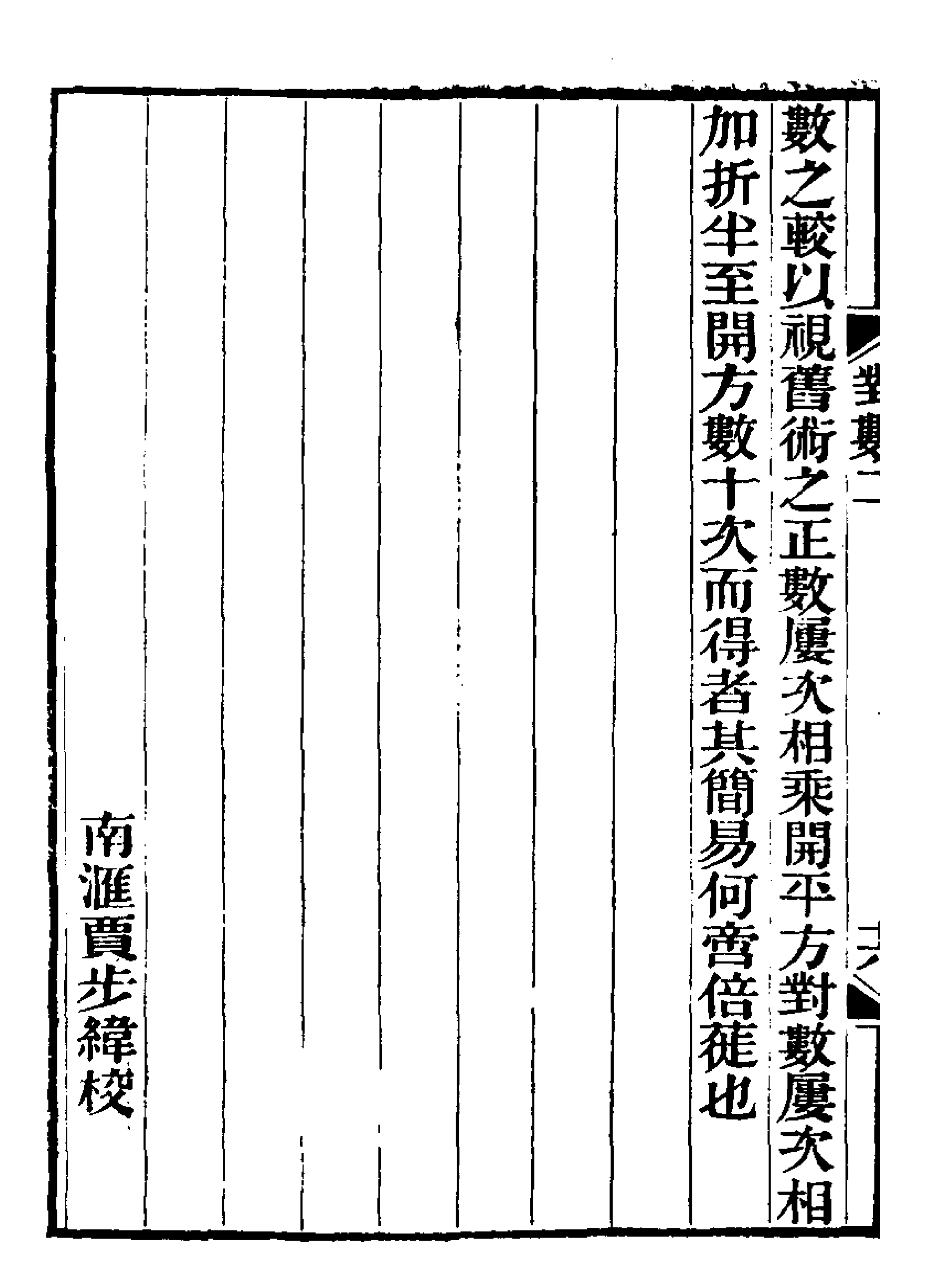
求十之對數法置前求尖錐定積時所設之二段至十段定其積一○○○○○○○○即十之對數也

正數	對數
一	○○○○○○○○○
二	○三○一○三○○○
三	○四七七一二一二六
四	○六○二○六○○○
五	○六九八九七○○○
六	○七七八一五一二六

七	〇八四五〇九八〇五
八	〇九〇三〇九〇〇〇
九	〇九五四二四二五二
一〇	一〇〇〇〇〇〇〇〇

解見第五條下

右第四第五第六第八第九五條其對數皆以加減得與舊術同第二第三第七三條其對數皆用諸尖錐遞加遞除得而二之對數用二十个尖錐三之對數止用十四个尖錐七之對數止用八个尖錐正數愈多則所用之尖錐愈少至正數五千以上可止用一長方除一次卽得兩對



數之較以視舊術之正數屢次相乘開平方對數屢次相加折半至開方數十次而得者其簡易何啻倍蓰也

南滙賈步緯校

垛積比類卷一

則古昔齋

海甯李善蘭學

垛積爲少廣一支而元郭太史以步躔離近汪氏孝嬰以釋遞兼董氏方立以推割圜西人代數微分中所有級數大半皆是其用亦廣矣哉顧歷來算書中不恆見惟元朱氏玉鑑茭草形段如象招數果垛疊藏諸門爲垛積術然其意在發明天元一故言之不詳亦無條理汪氏董氏之書有條理矣然一但言三角垛一但言四角垛餘皆不及則亦不備今所述有表有圖有法分條別派詳細言之欲令習算家知垛

積之術於九章外別立一幟其說自善蘭始

三角垛第一

三角垛表

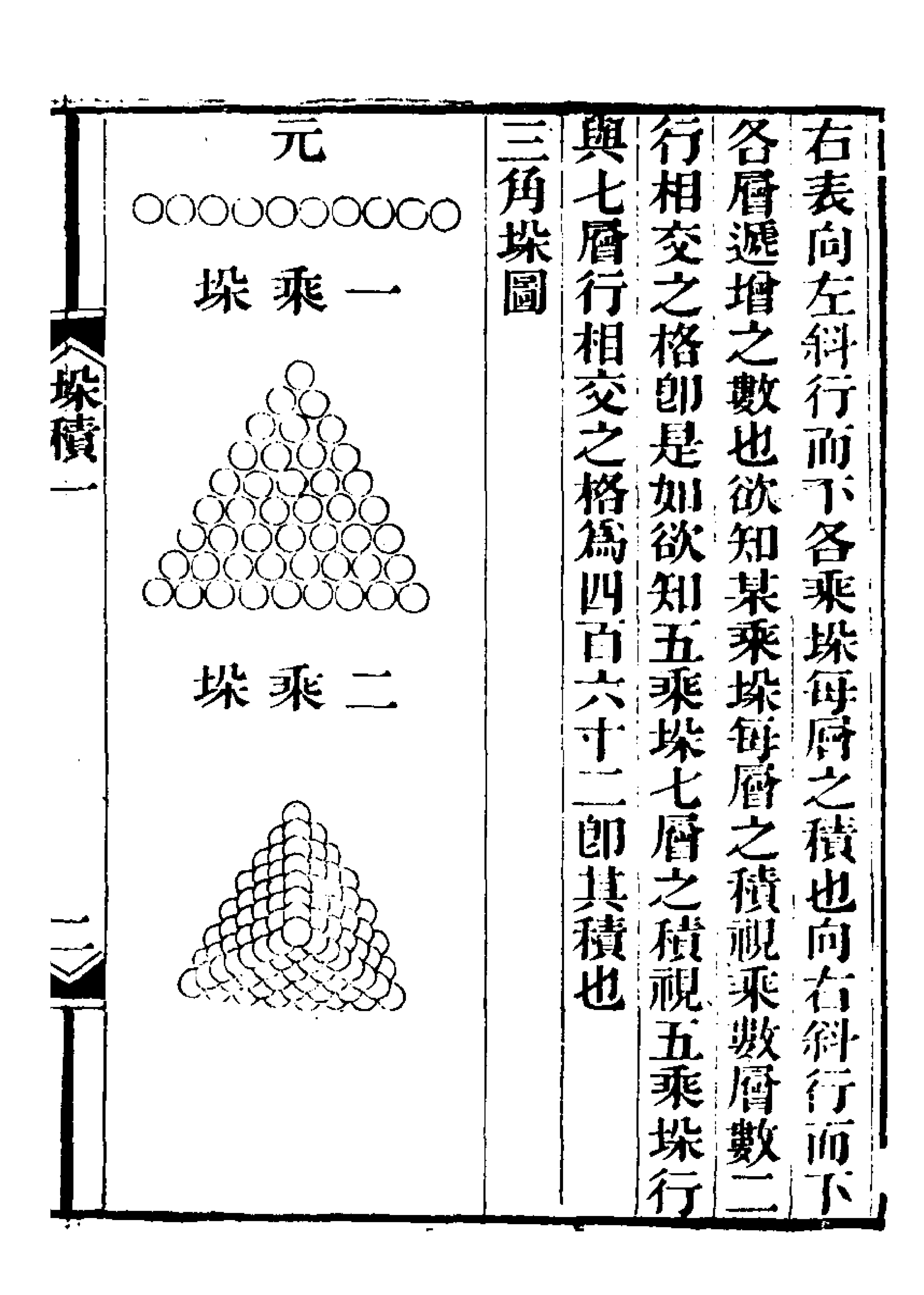
層	數
一層	一
二層	一 一
三層	一 二 一
四層	一 三 三 一
五層	一 四 六 四 一
六層	一 五 一〇 一〇 五 一
七層	一 六 一五 二〇 一五 六 一
八層	一 七 二一 三五 三五 二一 七 一
九層	一 八 二八 五六 七〇 五六 二八 八 一
十層	一 九 三六 八四 一二六 一二六 八四 三六 九 一
十一層	一 一〇 四五 一二〇 二一〇 二五二 二一〇 一二〇 四五 一〇 一
十二層	一 一一 五五 一六五 三三〇 四六二 四六二 三三〇 一六五 五五 一一 一
十三層	一 一二 六六 二二〇 四九五 七九二 九二四 七九二 四九五 二二〇 六六 一二 一

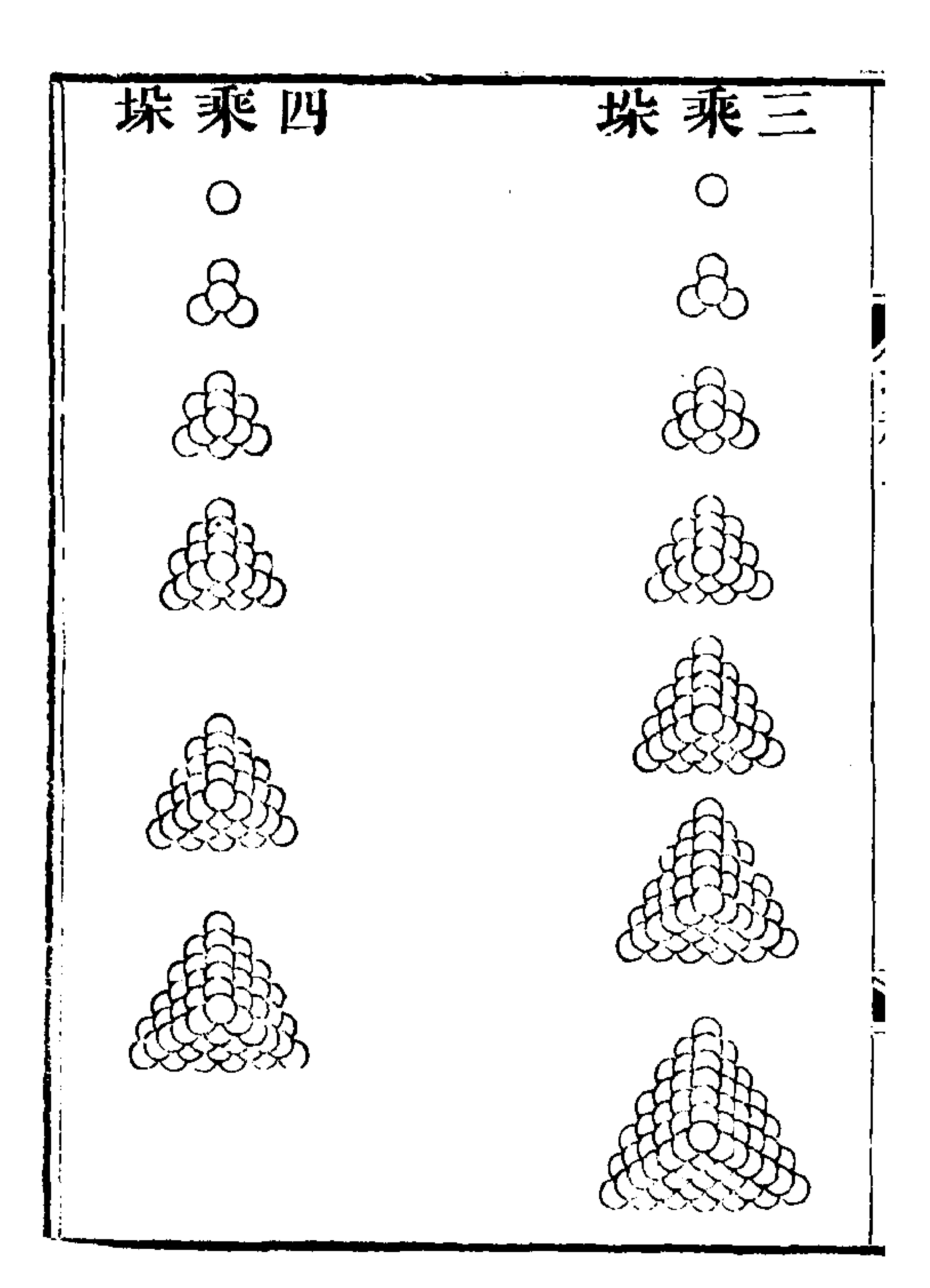
元 一乘垛 二乘垛 三乘垛 四乘垛 五乘垛 六乘垛 七乘垛 八乘垛 九乘垛 十乘垛 十一乘垛 十二乘垛

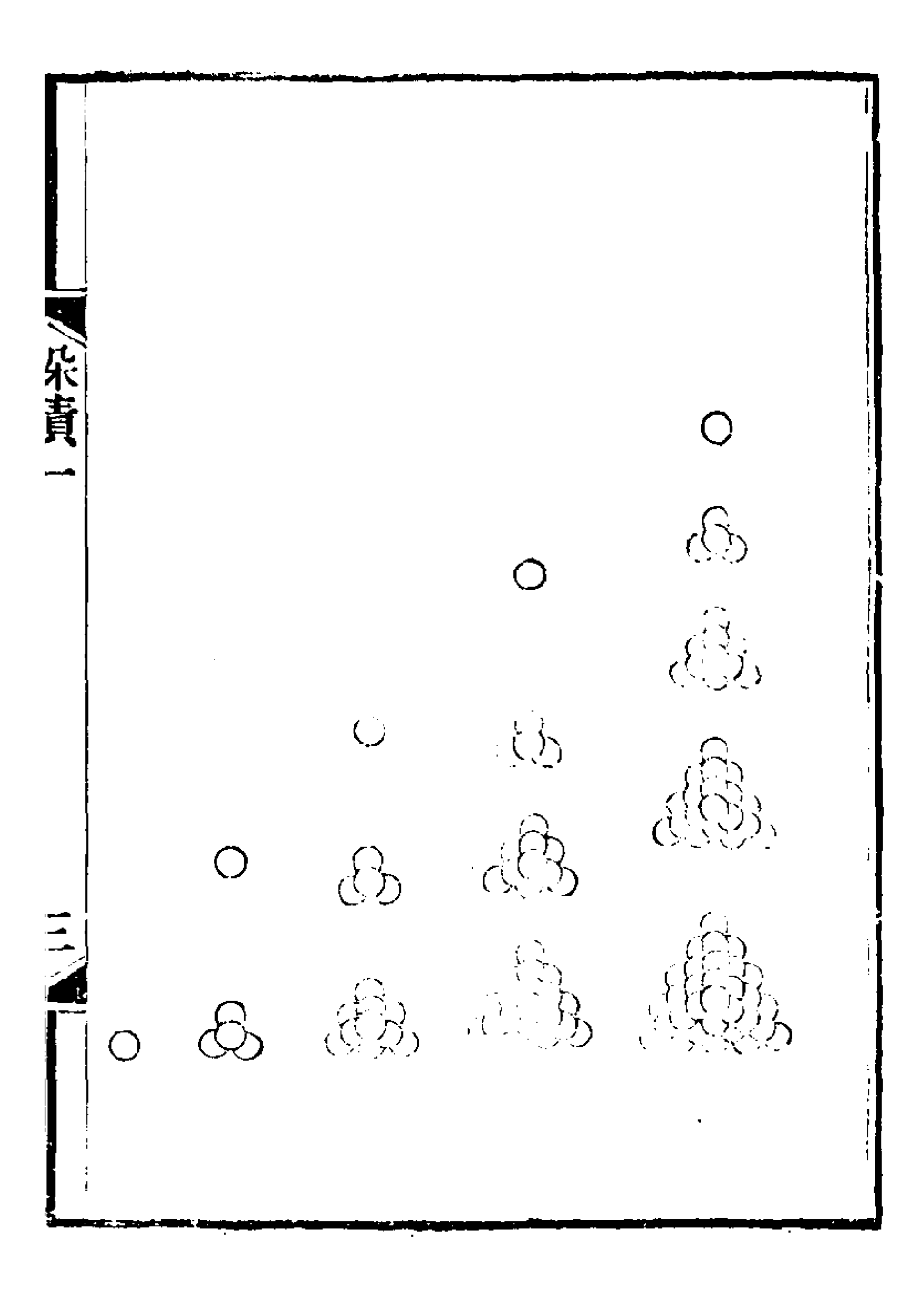
造表法并上層左右二數爲下層中一數

右表向左斜行而下各乘垜每層之積也向右斜行而下各層遞增之數也欲知某乘垜每層之積視乘數層數二行相交之格即是如欲知五乘垜七層之積視五乘垜行與七層行相交之格為四百六十二即其積也

三角垜圖




三乘垛
四乘垛



解曰一乘垜疊元而成二乘垜疊一乘垜而成三乘垜疊二乘垜而成四乘垜疊三乘垜而成五乘垜以上可類推

三角垜有高求積術

一乘垜置高以高加一乘之爲實二爲法得積

二乘垜置高以高加一乘之又以高加二乘之爲實二三相乘爲法得積

三乘垜置高以高加一乘之又以高加二乘之又以高加三乘之爲實二三四連乘爲法得積

四乘垜置高以高加一乘之又以高加二乘之又以高加三乘之又以高加四乘之爲實二三四五連乘爲法得積

凡有高求積者置高以高遞加一累乘之加至如本乘垛數乘之而止(加三乘垛加三乘之而止也)為實以一二三諸數遞乘至視本乘垛數多一而止(加四乘垛遞乘至五而止也)為法實如法而一得積

三角垛有積求高術

一乘垛倍積為正實一負方一負隅開平方得高

草曰立天元一為高于上以一加天元得丨元以乘上得〇太丨刂為二段積(寄左)乃以積倍之得下‖積為同數與左相消得二積卜卜為開方式

二乘垛六倍積為正實二為負方三為負廉一負隅開立

方得高

草曰立天元一爲高于上以天元丨加一得丨元丨又以天元丨加二得‖元相乘得‖‖元丨以乘上得‖元|||丨合以六（二三相乘所得）除之不除便以爲六段積（寄左）乃以積六之爲同數與左相消得（丅積卄卌丅）爲開方式

三乘垛二十四倍積爲正實六爲負方十一爲負上廉六爲負下廉一爲負隅開三乘方得高

草曰立天元一爲高于上以天元加一乘之得○元丨又以天元加二乘之得（太）‖|||丨又以天元加三乘之得（太）丄丨丅丨丨合以二十四（二三四連乘數）除之不除便以爲二十四

段積寄左乃以積二十四之為同數與左相消得‖三積丅丨乁

丄丅為開方式

四乘槃一百二十倍積為正實二十四為負方五十為第

一負廉三十五為第二負廉十為第三負廉一為負隅開

四乘方得高

草曰立天元一為高以天元加一乘之得〇元丨又以天

元加二乘之得〇太‖‖‖丨又以天元加三乘之得〇太丄丅

丅丨又以天元加四乘之得〇太‖三三〇‖‖三丨〇丨丨合以一百二

十二三四五連乘數除之不除便以為一百二十段積寄左乃以

積一百二十之為同數與左相消得丅〇積‖三三〇‖‖三丨〇丅為開

方式　五乘垛以上以天元仿此推之

三角垛有積求高開方廉隅表

倍積數
一
二
六
二四
一二〇
七二〇
五〇四〇
四〇三二〇
三六二八八〇
三六二八八〇〇

一乘　二乘　三乘　四乘　五乘　六乘　七乘　八乘　九乘

造表法以乘數乘上層左數加上層右數為下層中數倍積數乃二三四諸數連乘所得也

一乘支垛表

第二層右一左二爲表根三層以下如三角垛表法

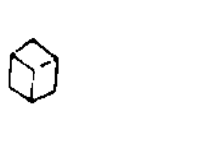
一乘支垜圖

方垜

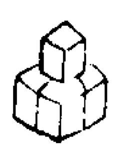
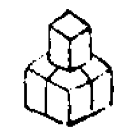
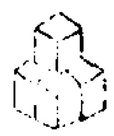
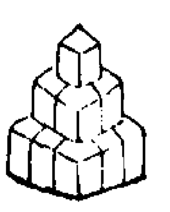
第一垜

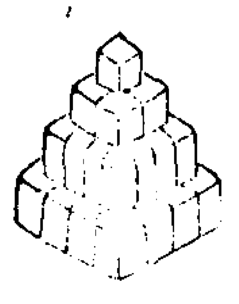
第二垜

第三垛

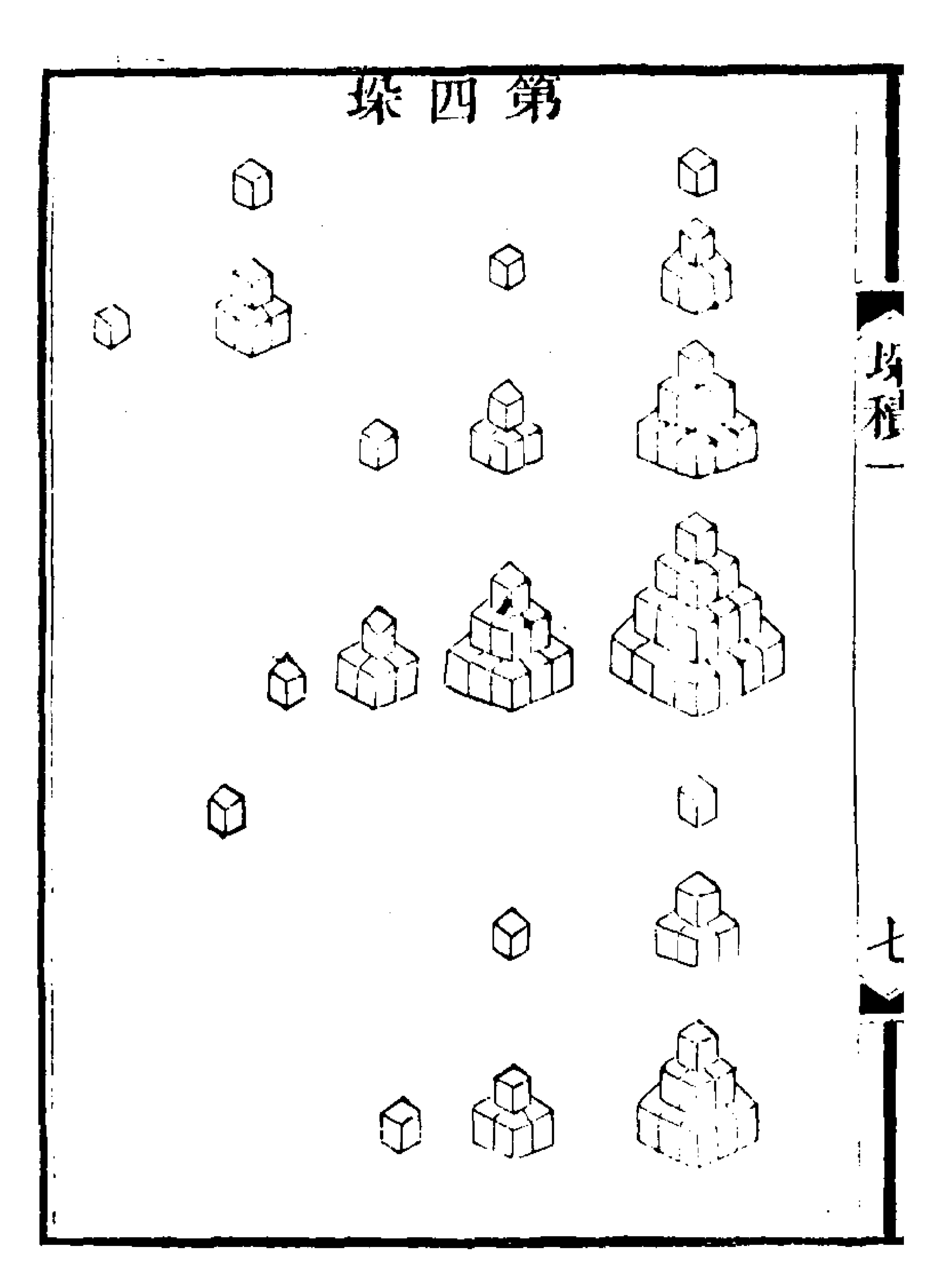






第四垛



一乘支垜者三角一乘垜之分支也方垜即兩箇三角一乘垜一自一層起一自二層起謂之方垜者逐層幷之皆成平方積也第一垜合兩箇三角二乘垜而成一自一層起一自二層起第二垜合兩箇三角三乘垜而成一自一層起一自二層起第三垜以下仿此

一乘支垜有高求積術

方垜以高自乘即得

第一垜倍高加一以高乘之又以高加一乘之爲實二三相乘爲法即得

第二垜倍高加二以高乘之又以高加二乘之又以高加

一乘之爲實二三四連乘爲法卽得
第三垛倍高加三以高乘之又以高加三乘之又以高加
二乘之又以高加一乘之爲實二三四五連乘爲法卽得
第四垛倍高加四以高乘之又以高加四乘之又以高加
三乘之又以高加二乘之又以高加一乘之爲實二三四
五六連乘爲法卽得
第五垛以上可類推
一乘支垛有積求高術
元垛積爲正實方空一爲負隅開平方卽得
第一垛六倍積爲正實一爲負方三爲負廉二爲負隅開

二乘方得高

草曰立天元一爲高倍之加一得丨元以天元乘之得〇丨元丨丨元丨丨合以法除之不除寄爲母便以爲積寄左乃以二三相乘得六爲法以乘積得丅積爲同數與左相消得丅積十卌卄爲開方式

第二垜二十四倍積爲正實四爲負方十爲負甲廉八爲負乙廉二一爲負隅開三乘方得高

草曰立天元一爲高倍之加二得丨丨元以天元乘之得〇元丨丨又以天元加一乘之得〇元丨丨丨丨丨又以天元加二乘之得〇元卜〇丌丨丨合以法除之今寄爲母便以爲積寄左

乃以二三四連乘得二十四爲法以乘積得‖積爲同數與左相消得‖積卌〇卌卅爲開方式

第三垛一百二十倍積爲正實十八爲負方四十五爲負甲廉四十爲負乙廉十五爲負丙廉二爲負隅開四乘方得高

草曰立天元一爲高倍之加三得川|元以天元乘之得|元‖又以天元加一乘之得|元三‖又以天元加二乘之得|元三三‖又以天元加三乘之得|元‖三川〇三‖合以法除之寄爲母便以爲積寄左　乃以二三四五連乘得一百二十爲法以乘積得|〇積一卌川三川〇川三|卜爲同數與左相消得

爲開方式

第四垜七百二十倍積爲正實九十六爲負方二百四十八爲負甲廉二百四十爲負乙廉一百十爲負丙廉二十四爲負丁廉二負隅開五乘方得高

草曰立天元一爲高倍之加四得川‖元以天元乘之得‖‖元‖又以天元加一乘之得‖‖元丅‖又以天元加二乘之得‖元‖丄〇‖又以天元加三乘之得‖元三丅‖‖丄‖丄‖又以天元加四乘之得三元‖‖‖‖〇丄〇‖三‖合以法除之寄爲毋便以爲積寄左乃以二三四五六連乘得七百二十爲法以乘積得‖積爲同數與左相消得‖積三丅‖‖‖〇‖〇丅‖丅爲開方式

二乘支垛表

第二層右一左三為表根三層以下如三角垛

二乘支垛圖

方垛

甲垛

第一垜

第二垛

第三垜

二乘支垜者三角二乘垜之分支也方垜即三箇三角一

乘垛其一自一層起其二自二層起甲垛卽三箇三角二
乘垛其一自一層起其二自二層起曰方垛甲垛者乃垛
之萌芽尚未成垛不得謂之第一第二垛故異其稱也第
一垛合三箇三角三乘垛而成第二垛合三箇三角四乘
垛而成第三垛合三箇三角五乘垛而成皆一自一層起
二自二層起第四垛以下可類推三乘支垛以下理俱同

二乘支垛有高求積術

方垛三倍高減一以高乘之爲實二爲法得積

甲垛三倍高以高乘之又以高加一乘之爲實二三相乘
爲法得積

第一垛三倍高加一以高乘之又以高加一高加二連乘之爲實一二三四連乘爲法得積

第二垛三倍高加二以高乘之又以高加一高加二高加三連乘之爲實二三四五連乘爲法得積

第三垛三倍高加三以高乘之又以高加一高加二高加三高加四連乘之爲實二三四五六連乘爲法得積

第四垛以下可類推

二乘支垛有積求高術

方垛倍積爲正實一爲正方三爲負隅開平方得高

草曰立天元一爲高三之減一得丅|||元以天元乘之得○

丄川合以二除之寄爲毋便以爲積寄左乃以積二倍之
爲同數與左相消得川積|卌爲開方式
甲垛六倍積爲正實方空三爲負廉三爲負隅開立方得
高
草曰立天元一爲高三之得○川元以天元乘之得○元川
又以天元加一乘之得○元川川川合以六除之寄爲毋便
以爲積寄左乃以積六倍之爲同數與左相消得丅積○卌
卌爲開方式
第一垛二十四倍積爲正實一爲負方九爲負甲廉十爲
負乙廉三爲負隅開三乘方得高

草曰立天元一爲高三之加一得丨‖元以天元乘之得‖元川又以天元加一乘之得‖元川川又以天元加二乘之得‖元卌丨〇川合二十四除之寄爲毋使以爲積寄左乃以積二十四倍之爲同數與左相消得‖積卄冊丨〇卌卌爲開方式

第二垛一百二十倍積爲正實十二爲負方四十爲負甲廉四十五爲負乙廉二十爲負丙廉三爲負隅開四乘方得高

草曰立天元一爲高三之加二得‖‖元以天元乘之得〇‖元川又以天元加一乘之得〇‖元☰川又以天元加二乘之得〇‖元二丨川又以天元加三乘之得〇丨元三〇‖三‖〇川

合以一百二十除之寄為册便以為積 寄左 乃以積一百
二十倍之為同數與左相消得 86400積 -72 -222 -255 -135 -33 -3 為開方式
第三垛七百二十倍積為正實七十二為負方二百二十
二為負甲廉二百五十五為負乙廉一百三十五為負丙
廉三十三為負丁廉三為負隅開五乘方得高
草曰立天元一為高三之加三得 3 3元 以天元乘之得〇
3元 3 又以天元加一乘之得〇 3元 6 3 又以天元加二乘
之得〇 6元 15 12 3 又以天元加三乘之得〇 18元 51 51 21 3
又以天元加四乘之得〇 72元 222 255 135 33 3 合以七百二十
除之不除寄為册便以此為積 寄左 乃以積七百二十倍

之爲同數與左相消得積[illegible]爲開方式

三乘支垛

三乘支垛表

一層 二層 三層 四層 五層 六層 七層 八層 九層 十層 十一層 十二層 十三層

方垛 甲垛 乙垛 一垛 二垛 三垛 四垛 五垛 六垛 七垛 八垛 九垛

第二層右一左四爲表根餘如三角垛表法

三乘支垜圖

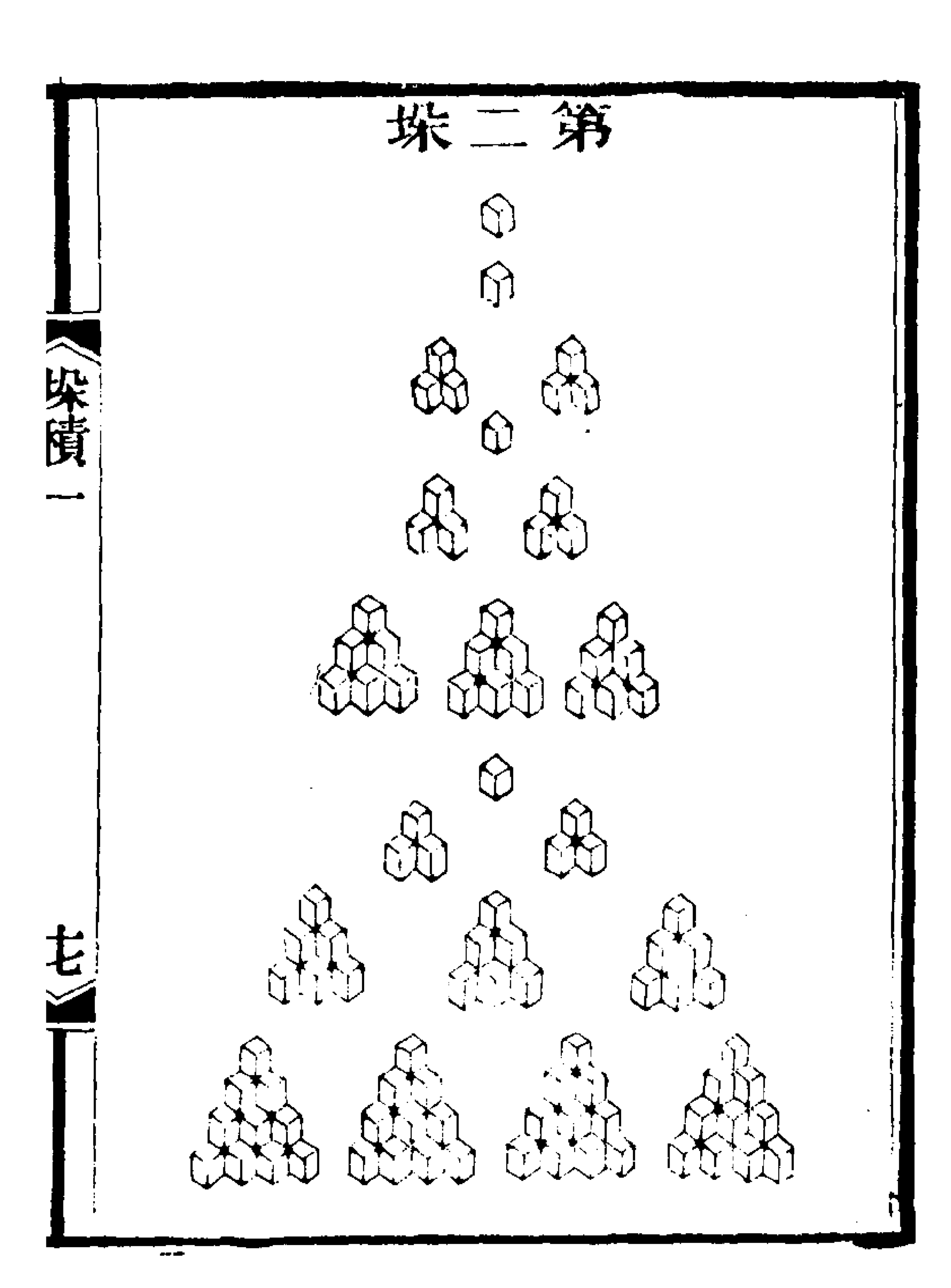
方垜

甲垜

第一垜

乙垜

第二垜



第三垜

三乘支垜者三角三乘垜之分支也

三乘支垜有高求積術

方垜四倍高減二以高乘之爲實二二爲法得積

甲垜四倍高減一以高乘之又以高加一乘之爲實二二三

相乘爲法得積
乙垜四倍高以高乘之又以高加一乘之又以高加二乘之爲實二三四連乘爲法得積
第一垜四倍高加一以高乘之又以高加一高加二高加三壘乘之爲實二三四五連乘爲法得積
第二垜四倍高加二以高乘之又以高加一高加二高加三高加四四壘乘之爲實二三四五六連乘爲法得積
第三垜四倍高加三以高乘之又以高加一高加二高加三高加四高加五壘乘之爲實二三四五六七連乘爲法得積

第四垛以下可類推

三乘支垛有積求高術

方垛二倍積爲正實二爲正方四爲負隅開平方得高

草曰立天元一爲高四之減二得𠦃𠄌元以天元乘之得○

𠄌元川爲二段積寄左乃以積二之得川積爲同數與左相消

得川積川卌爲開方式

甲垛六倍積爲正實一爲正方三爲負廉四爲負隅開立

方得高

草曰立天元一爲高四之減一得丅川元以天元乘之得𠄌元

川又以天元加一乘之得𠄌元川川爲六段積寄左乃以積

六之爲同數與左相消得T積丨卅卌爲開方式

乙垜二十四倍積爲正實方空八爲負甲廉十二爲負乙

廉四爲負隅開三乘方得高

草曰立天元一爲高四之得||||元以天元乘之得〇元||||又以

天元加一乘之得〇元||||||又以天元加二乘之得〇元ⅢⅡ

||||爲二十四段積寄左乃以積二十四之爲同數與左相

消得丨積〇卅卅卌爲開方式

第一垜一百二十倍積爲正實六爲負方三十五爲負甲

廉五十爲負乙廉二十五爲負丙廉四爲負隅開四乘方

得高

草曰立天元一爲高四之加一得〡〤元以天元乘之得〡元
〣又以天元加一乘之得〡元〤〣又以天元加二乘之得
〡元〦三〣又以天元加三乘之得〧元〢〧三〇〢三〣爲一百二
十段積寄左　乃以積一百二十之爲同數與左相消得〦〇積
下〢〧三〇〢〧卌爲開方式

第二垛七百二十倍積爲正實四十八爲負方一百九十
六爲負甲廉二百七十爲負乙廉一百六十爲負丙廉四
十二爲負丁廉四爲負隅開五乘方得高

草曰立天元一爲高四之加二得〢〤元以天元乘之得〡元
〣又以天元加一乘之得〡元〧〣又以天元加二乘之得

[算籌]又以天元加三乘之得[算籌]又以天元加四乘之得[算籌]爲七百二十段積寄左乃以積七百二十之爲同數與左相消得[算籌]爲開方式

湘鄉曾紀澤校

